Lycée Fénelon Sainte-Marie

Préparation Science-Po/prépa HEC

Sommes

Version du 17 octobre 2015

Exercice 1 – Sommes de référence

Des résultats classiques à savoir démontrer par récurrence :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ et } \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

Exercice 2 – Une autre somme de référence

Dans cet exercice, on se propose de calculer $\sum_{k=1}^{n} k^4$.

1. A l'aide de la formule du binôme, développer : $(k+1)^5$.
2. En remarquant que l'on a : $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^5$, utiliser le développement de la question 1 pour établir l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = n^4 + \sum_{k=1}^{n-1} k^4 = n^4 + \frac{1}{5}\left(n^5 - 10\sum_{k=1}^{n-1} k^3 - 10\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1\right)$$

3. En déduire alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

Exercice 3 – Sommes doubles (Episode I)

Calculer :

$$\sum_{1\le i<j\le n} (i+j),\ \sum_{1\le i\le j\le n} (i+j) \text{ et } \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i=j}} (i+j)$$

Quelle relation existe entre ces trois sommes ? En donner une interprétation.

Exercice 4 – Sommes doubles (Episode II)

Calculer :

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}(i\times j),\ \sum_{1\leq i\leq j\leq n}(i\times j)\ \text{et}\ \sum_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq n\\ i=j}}(i\times j)$$

Corrigés

Exercice 1 – Sommes de référence

Les démonstrations sont classiques et nous ne les rappelons pas ici.

Exercice 2 – Une autre somme de référence

1. On a facilement (pour un exposant petit tel 5, il ne faut pas hésiter à reconstruire rapidement les premières lignes du triangle de Pascal) :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

D'où :

$$\boxed{(k+1)^5 = k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1}$$

2. On a : $\sum_{k=1}^{n} k^5 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^5$ (une telle égalité résulte d'une « simple » réindexation de la somme). En utilisant le développement de la question précédente, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n} k^5 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^5$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} k^5 = \sum_{k=0}^{n-1} \left(k^5 + 5k^4 + 10k^3 + 10k^2 + 5k + 1\right)$$

$$\Leftrightarrow n^5 + \sum_{k=1}^{n-1} k^5 = \sum_{k=0}^{n-1} k^5 + 5\sum_{k=0}^{n-1} k^4 + 10\sum_{k=0}^{n-1} k^3 + 10\sum_{k=0}^{n-1} k^2 + 5\sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$\Leftrightarrow n^5 + \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} k^5} = \cancel{\sum_{k=1}^{n-1} k^5} + 5\sum_{k=1}^{n-1} k^4 + 10\sum_{k=1}^{n-1} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1$$

$$\Leftrightarrow 5\sum_{k=1}^{n-1} k^4 = n^5 - \left(10\sum_{k=1}^{n-1} k^3 + 10\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 5\sum_{k=1}^{n-1} k + \sum_{k=0}^{n-1} 1\right)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n-1} k^4 = \frac{1}{5}\left(n^5 - 10\sum_{k=1}^{n-1} k^3 - 10\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1\right)$$

En remarquant que l'on a $\sum_{k=1}^{n} k^4 = n^4 + \sum_{k=1}^{n-1} k^4$, il vient finalement :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^4 = n^4 + \sum_{k=1}^{n-1} k^4 = n^4 + \frac{1}{5}\left(n^5 - 10\sum_{k=1}^{n-1} k^3 - 10\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \right)}$$

3. En utilisant les sommes classiques du premier exercice :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= n^4 + \frac{1}{5}\left(n^5 - 10\sum_{k=1}^{n-1} k^3 - 10\sum_{k=1}^{n-1} k^2 - 5\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n-1} 1 \right) \\
&= \frac{1}{5}\left(n^5 + 5n^4 - 10\left(\frac{n(n-1)}{2} \right)^2 - 10\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - 5\frac{n(n-1)}{2} - n \right) \\
&= \frac{1}{5}\left(n^5 + 5n^4 - \frac{5}{2}n^2(n-1)^2 - \frac{5}{3}n(n-1)(2n-1) - \frac{5}{2}n(n-1) - n \right) \\
&= \frac{1}{5}\times\frac{n}{6}\left(6n^4 + 30n^3 - 15n(n-1)^2 - 10(n-1)(2n-1) - 15(n-1) - 6 \right) \\
&= \frac{n}{30}\left(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1 \right)
\end{aligned}$$

-1 est racine (presque ? ☺) évidente de $6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1$. On a alors facilement :

$$6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1 = (n+1)\left(6n^3 + 9n^2 + n - 1\right)$$

La calculatrice peut nous conduire sur la voie d'une racine « simple » de $6n^3 + 9n^2 + n - 1$: $-\frac{1}{2}$. On a alors : $6n^3 + 9n^2 + n - 1 = (2n+1)\left(3n^2 + 3n - 1\right)$.
Le trinôme $3n^2 + 3n - 1$ admet un discriminant irrationnel. Ses racines le sont également. Nous n'en fournissons de fait pas une forme factorisée.

On a donc : $6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1 = (n+1)(2n+1)\left(3n^2 + 3n - 1\right)$ et, finalement :

$$\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n}{30}\left(6n^4 + 15n^3 + 10n^2 - 1\right) = \frac{n}{30}(n+1)(2n+1)\left(3n^2 + 3n - 1\right)$$

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2 + 3n - 1\right)}{30}}$$

Exercice 3 – Sommes doubles (Episode I)

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i<j\le n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n}(i+j)\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n-1}\left(\left(n-(i+1)+1\right)\times i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n-1}\left(n\times i - i^2\right) + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=i+1}^{n} j\right)\\
&= n\times\sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j\right)\\
&= n\times\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right)\\
&= \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\times\sum_{i=1}^{n-1} 1 - \frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{n-1}\left(i^2+i\right)\\
&= \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\times(n-1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1} i^2 - \frac{1}{2}\times\sum_{i=1}^{n-1} i\\
&= \frac{n^2(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n(n+1)(n-1)}{2} - \frac{n(n-1)(2n-1)}{12} - \frac{n(n-1)}{4}\\
&= \frac{n(n-1)}{12}\times\left[6n - 2(2n-1) + 6(n+1) - (2n-1) - 3\right]\\
&= \frac{n(n-1)}{12}\times\left(\cancel{6n} \cancel{-4n} \cancel{+2} + 6n + 6 \cancel{-2n} \cancel{+1} \cancel{-3}\right)\\
&= \frac{n(n-1)}{12}\times(6n+6)\\
&= \frac{n\left(n^2-1\right)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}(i+j)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} i + \sum_{j=1}^{n} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(n\times i + \sum_{j=1}^{n} j\right) = n\times\sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= n\times\frac{n(n+1)}{2} + n\times\frac{n(n+1)}{2}\\
&= n^2(n+1)
\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i=j}}(i+j) = \sum_{i=1}^{n} 2i = 2\times\sum_{i=1}^{n} i = 2\times\frac{n\times(n+1)}{2} = n\times(n+1)$$

$$\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)=\frac{n(n^2-1)}{2},\ \sum_{1\le i\le j\le n}(i+j)=n^2(n+1)\ \text{ et }\ \sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n\\i=j}}(i+j)=n(n+1)$$

Dans une somme double, on somme sur des couples. Ainsi, l'ensemble $\{(i\,,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,1\le i\le n \text{ et } 1\le j\le n\}$ correspond, dans le plan, à un ensemble de points, de coordonnées entières, situés dans un carré. L'ensemble $\{(i\,,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,1\le i\le n \text{ et } i=j\}$ correspond aux points situés sur une des diagonales de ce carré (la première bissectrice en l'occurrence). Enfin, l'ensemble $\{(i\,,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,1\le i<j\le n\}$ correspond à un demi-carré, en l'occurrence, l'ensemble des points du premier carré situés au-dessus de la diagonale précédente.
On peut donc écrire l'ensemble $\{(i\,,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,1\le i\le n \text{ et } 1\le j\le n\}$ comme la réunion de trois ensembles deux à deux disjoints :

$$\begin{aligned}\{(i\,,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,1\le i\le n \text{ et } 1\le j\le n\}=&\{(i\,,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,1\le i<j\le n\}\\&\cup\{(i\,,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,1\le j<i\le n\}\\&\cup\{(i\,,\,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\,/\,1\le i\le n \text{ et } i=j\}\end{aligned}$$

Ainsi, on a : $\displaystyle\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j)=\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)+\sum_{1\le j<i\le n}(i+j)+\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n\\i=j}}(i+j)$.

Dans les deux premières sommes, les indices *i* et *j* jouent des rôles symétriques. Elles sont égales. En définitive, on a :

$$\sum_{1\le i\le j\le n}(i+j)=2\times\sum_{1\le i<j\le n}(i+j)+\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n\\i=j}}(i+j)$$

Exercice 4 – Sommes doubles (Episode II)

On a :

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}(i\times j) &= \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(i\times j)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\times\sum_{j=i+1}^{n}j\right)=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\times\left(\sum_{j=1}^{n}j-\sum_{j=1}^{i}j\right)\right)\\
&=\sum_{i=1}^{n-1}\left(i\times\left(\frac{n(n+1)}{2}-\frac{i(i+1)}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(n(n+1)\times i-i^2\times(i+1)\right)\\
&=\frac{1}{2}\left\{n(n+1)\times\sum_{i=1}^{n-1}i-\sum_{i=1}^{n-1}i^3-\sum_{i=1}^{n-1}i^2\right\}\\
&=\frac{1}{2}\left\{n(n+1)\times\frac{n(n-1)}{2}-\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right\}\\
&=\frac{1}{2}\times\frac{n(n-1)}{12}\times\left\{6n(n+1)-3n(n-1)-2(2n-1)\right\}\\
&=\frac{n(n-1)}{24}\times\left(6n^2+6n-3n^2+3n-4n+2\right)\\
&=\frac{n(n-1)}{24}\times\left(3n^2+5n+2\right)=\frac{n(n-1)}{24}\times(n+1)(3n+2)\\
&=\frac{n\left(n^2-1\right)(3n+2)}{24}\end{aligned}$$

A titre d'illustration, avec $n=3$, on obtient :

$$\sum_{1\le i<j\le n}(i\times j)=1\times2+1\times3+2\times3=2+3+6=11$$

Et :

$$\frac{n\left(n^2-1\right)(3n+2)}{24}=\frac{3\times\left(3^2-1\right)\times(3\times3+2)}{24}=\frac{3\times8\times11}{24}=11$$

Avec $n=4$:

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i<j\le n}(i\times j)&=1\times2+1\times3+1\times4+2\times3+2\times4+3\times4\\
&=2+3+4+6+8+12\\
&=35\end{aligned}$$

Et :

$$\frac{n\left(n^2-1\right)(3n+2)}{24}=\frac{4\times\left(4^2-1\right)\times(3\times4+2)}{24}=\frac{4\times15\times14}{24}=\frac{\boxed{4}\times\boxed{3}\times5\times\boxed{2}\times7}{\boxed{24}}=35$$

$$\begin{aligned}\sum_{1\le i\le j\le n}(i\times j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i\times j)=\sum_{i=1}^{n}\left(i\times\sum_{j=1}^{n}j\right)\\ &=\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\times\left(\sum_{i=1}^{n}j\right)=\frac{n(n+1)}{2}\times\frac{n(n+1)}{2}\\ &=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

$$\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i=j}}(i\times j)=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\boxed{\sum_{1\le i<j\le n}(i\times j)=\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24},\ \sum_{1\le i\le j\le n}(i\times j)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 \text{ et } \sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i=j}}(i\times j)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

De façon similaire à ce que nous avons obtenu à l'exercice 3, comparons : $\sum_{1\le i\le j\le n}(i\times j)$ et $\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i=j}}(i\times j)+2\times\sum_{1\le i<j\le n}(i\times j)$.

On a : $\sum_{1\le i\le j\le n}(i\times j)=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ et, par ailleurs :

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n\\ i=j}}(i\times j)+2\times\sum_{1\le i<j\le n}(i\times j) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\times\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24}\\ &=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n^2-1)(3n+2)}{12}\\ &=\frac{n(n+1)}{12}\times\{2\times(2n+1)+(n-1)\times(3n+2)\}\\ &=\frac{n(n+1)}{12}\times(4n+2+3n^2-n-2)\\ &=\frac{n(n+1)}{12}\times(3n^2+3n)=\frac{n(n+1)}{12}\times 3n(n+1)\\ &=\frac{n^2(n+1)^2}{4}\\ &=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2\end{aligned}$$

On a bien :

$$\sum_{1\le i\le j\le n}(i\times j)=\sum_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n\\i=j}}(i\times j)+2\times\sum_{1\le i<j\le n}(i\times j)$$