Lycée Fénelon Sainte-Marie

Préparation concours Sciences-Po

Concours blanc de Mathématiques

Février 2013

Durée : 3 heures

Tout document interdit.
La calculatrice graphique type « lycée » est autorisée.

Toute réponse doit être soigneusement justifiée,
la précision et la qualité de la rédaction
entrant pour une part importante dans l'évaluation.

Le problème et le VRAI-FAUX proposés sont indépendants
et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Le sujet comporte un total de 4 pages
(y compris cette page de garde).

Problème. Autour de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x}$

Dans cet exercice, on considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{\ln x}{x}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction *f* dans un repère orthogonal.

Les deux parties du problème sont indépendantes mais doivent être traitées dans l'ordre proposé.

1ère partie : étude de la fonction *f*

1. Calculer, pour tout *x* réel strictement positif $f'(x)$.
2. Etudier les variations de la fonction *f* sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
3. Donner le signe de $f(x)$ lorsque *x* varie dans l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_1 à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=1$.
5. Calculer, pour tout *x* réel strictement positif $f''(x)$ (on rappelle que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction *f*, est la fonction dérivée de la fonction dérivée de la fonction *f*).
6. Résoudre l'équation $f''(x)=0$ sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ (on montrera que l'équation admet une unique solution α dont on donnera la valeur exacte).
7. Déterminer l'équation réduite de la tangente T_α à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse $x=\alpha$.
8. Dans un même repère (unités graphiques : 2cm sur l'axe des abscisses et 20cm sur l'axe des ordonnées), tracer $\mathscr{C}$, T_1 et T_α.
9. Donner, par lecture graphique (et en vous aidant éventuellement de votre calculatrice), en fonction de la valeur du réel *k*, le nombre de solution de l'équation $f(x)=k$.

2ème partie : dérivée *n*ième de la fonction *f*

Pour tout entier naturel *n*, on note $f^{(n)}$ la dérivée *n*ième de la fonction *f* :

- $f^{(0)}$ désigne la fonction *f* elle-même.
- $f^{(1)}$ désigne la dérivée de la fonction *f*, c'est-à-dire $f\,'$.
- $f^{(2)}$ désigne la dérivée seconde de la fonction *f*, c'est-à-dire la dérivée de $f\,'$.
- etc.

On rappelle, par ailleurs, que $n!$ désigne la factorielle de l'entier naturel *n* et que l'on a :

- pour tout *n* entier naturel non nul : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times ... \times n$.
- $0! = 1$.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel *n*, on a :

$$\forall x \in \left]0\,;+\infty\right[,\ f^{(n)}(x) = \frac{u_n + v_n \ln x}{x^{n+1}}$$

avec (u_n) et (v_n) vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = v_n - (n+1)u_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = -(n+1)v_n \end{cases}$$

Remarque : le résultat de cette question peut être admis pour la suite.

2. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel *n* :

$$v_n = (-1)^n\, n!$$

3. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout entier naturel *n* non nul :

$$u_n = (-1)^{n+1}\, n! \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n}\right)$$

4. Donner, grâce aux questions précédentes : $f^{(7)}(x)$ pour tout réel *x* strictement positif.

5. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel *n*, la dérivée *n*ième de la fonction inverse sur l'intervalle $\left]0\,;+\infty\right[$ est la fonction :

$$x \mapsto \frac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$$

6. Rappelons la formule de Leibniz. Si *f* et *g* sont deux fonctions *n* fois dérivables sur un intervalle I, alors la fonction produit fg est elle-même *n* fois dérivable sur I et on a :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

En notant que l'on a $\dfrac{\ln x}{x} = \ln x \times \dfrac{1}{x}$, utiliser la formule de Leibniz pour retrouver directement les expressions de u_n et v_n en fonction de *n*.

VRAI-FAUX

Ce « VRAI-FAUX » propose 10 affirmations. Vous devez préciser, pour chacune d'elle, si elle est vraie ou fausse. Si une affirmation est vraie, vous devez la démontrer, si elle est fausse, vous devez fournir un contre-exemple.

Affirmation 1

Si une fonction est définie et continue sur un intervalle I alors elle y est dérivable.

Affirmation 2

La fonction $f : x \mapsto e^x + e^{-x}$ est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.

Affirmation 3

Si une fonction *f*, définie sur un intervalle I, est croissante sur cet intervalle et y prend des valeurs strictement positives alors la fonction $g = \dfrac{-2}{\sqrt{f}}$ est croissante sur l'intervalle I.

Affirmation 4

La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+1} - u_n = 5^{23}(u_{n+1} - u_n)$ est une suite géométrique convergente.

Affirmation 5

Si une suite est bornée alors elle est convergente.

Affirmation 6

Si deux suites (u_n) et (v_n) sont telles que la suite $(u_n v_n)$ converge alors elles sont toutes les deux convergentes.

Affirmation 7

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison *q* strictement positifs.

La suite $(\ln u_n)$ est une suite arithmétique.

Affirmation 8

Soit *n* un entier naturel. Pour tout entier naturel *k* compris entre 0 et *n*, on a : $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.

Affirmation 9

Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0{,}25$.

La probabilité d'obtenir au moins un succès est supérieure ou égale à 90%.

Affirmation 10

La variance d'une loi binomiale de paramètre *n* fixé est inférieure ou égale à : $0{,}25n$.