

Lycée Fénelon Sainte-Marie
Préparation concours Sciences-Po

Examen blanc de Mathématiques

Mai 2012

Durée : 4 heures

Tout document interdit.

La calculatrice type « lycée » est autorisée.

Toute réponse doit être soigneusement justifiée,
la précision et la qualité de la rédaction
entrant pour une part importante dans l'évaluation.

La sujet comporte deux problèmes indépendants
qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

CORRIGE DU 1^{er} PROBLEME

1^{er} Problème : étude d'une famille de fonctions

1^{ère} partie Etude d'une première famille de fonctions

Etude de la famille de fonctions définie par :

$$g_m : x \mapsto e^x - mx$$

où m est un réel non nul.

On note \mathcal{C}_m la courbe représentative de la fonction g_m dans un repère orthogonal.

1. La fonction exponentielle est définie sur \mathbb{R} et la fonction $x \mapsto -mx$ est également définie sur \mathbb{R} en tant que fonction linéaire. On en déduit ainsi que la fonction g_m est définie sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions définies sur cet ensemble.

$$\mathcal{D}_m = \mathbb{R}$$

2. On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$. Puis :

- Si $m < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-mx) = -\infty$ et (somme) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = -\infty$.
- Si $m > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-mx) = +\infty$ et (somme) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = +\infty$.

Dans les deux cas, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g_m(x) - (-mx)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

On en déduit immédiatement que la courbe représentative \mathcal{C}_m de la fonction g_m admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = -mx$.

Comme, pour tout x réel, on a : $g_m(x) - (-mx) = e^x > 0$, on en conclut que la courbe est située au-dessus de son asymptote.

Pour tout x réel, on a : $g_m(x) = e^x - mx = e^x \left(1 - m \frac{x}{e^x} \right)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée), il vient $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - m \frac{x}{e^x} \right) = 1$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, on en déduit (produit) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - m \frac{x}{e^x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) = +\infty$.

Si $m < 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = -\infty$ et si $m > 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = +\infty$.

La courbe représentative \mathcal{C}_m de la fonction g_m admet en $-\infty$ une asymptote oblique d'équation $y = -mx$ et est située au-dessus.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) = +\infty$$

3. La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} . La fonction $x \mapsto -mx$ est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction linéaire. La fonction g_m est donc dérivable sur \mathbb{R} comme somme de deux fonctions dérivables sur cet intervalle et pour tout x réel, on a :

$$g_m'(x) = e^x - m$$

Si $m < 0$, on a, la fonction exponentielle prenant des valeurs strictement positives sur \mathbb{R} :

$$\forall x \in \mathbb{R}, g_m'(x) = e^x - m > -m > 0$$

Dans ce cas, la fonction g_m est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Si $m > 0$, on a, pour tout x réel : $g_m'(x) = e^x - m = e^x - e^{\ln m}$.

On en déduit immédiatement :

- $g_m'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln m$.
- $g_m'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \ln m$.
- $g_m'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \ln m$.

Dans ce cas, la fonction g_m est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \ln m]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\ln m; +\infty[$. Elle admet donc un minimum en $\ln m$ et on a : $g_m(\ln m) = e^{\ln m} - m \ln m = m - m \ln m = m(1 - \ln m)$.

Si $m < 0$, la fonction g_m est strictement croissante sur \mathbb{R} .

Si $m > 0$, la fonction g_m est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty; \ln m]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[\ln m; +\infty[$.

4. Les éléments précédents nous permettent de dresser le tableau de variation de la fonction g_m . On doit distinguer deux cas selon que m est strictement négatif ou strictement positif.

Si $m < 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g_m'(x)$	+	
g_m		

Si $m > 0$

x	$-\infty$	$\ln m$	$+\infty$
$g_m'(x)$	-		+
g_m			

5. Au regard des variations de la fonction g_m obtenues précédemment, nous allons, ici encore, distinguer deux situations principales.

Si $m < 0$

La fonction g_m est continue sur \mathbb{R} puisqu'elle y est dérivable.

Elle y est strictement croissante.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) = +\infty$.

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet alors d'affirmer que la fonction g_m prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle

$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) \right[=]-\infty; +\infty[$ (en d'autres termes, cette fonction définit une bijection de \mathbb{R} dans \mathbb{R}).

On en déduit que l'équation $g_m(x) = 0$ admet une unique solution α .

Comme la fonction g_m est strictement croissante sur \mathbb{R} , il vient immédiatement :

- Si $x < \alpha$ alors $g_m(x) < g_m(\alpha) = 0$.
- $g_m(\alpha) = 0$.
- Si $x > \alpha$ alors $g_m(x) > g_m(\alpha) = 0$.

Remarque : comme $m < 0$, on a : $g_m(\alpha) = 0 \Leftrightarrow e^\alpha - m\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{e^\alpha}{m} \Rightarrow \alpha < 0$.

Le réel α est strictement négatif.

Si $m > 0$

On a vu que dans ce cas la fonction g_m admettait un minimum en $x = \ln m$ et que la valeur de ce minimum était : $g_m(\ln m) = m(1 - \ln m)$. On va donc de voir discuter à nouveau selon le signe de $m(1 - \ln m)$ qui est celui de $1 - \ln m$ puisque m est strictement positif.

On a $1 - \ln m = 0 \Leftrightarrow \ln m = 1 \Leftrightarrow m = e$ et $1 - \ln m > 0 \Leftrightarrow \ln m < 1 \Leftrightarrow m < e$.

D'où la discussion :

- Si $m \in]0; e[$, on a $1 - \ln m > 0$ et la fonction g_m prend des valeurs strictement positives.
- Si $m = e$, la valeur minimale prise par la fonction g_m (en $\ln m = \ln e = 1$) est égale à 0. Ainsi, on a : $g_e(1) = 0$ et pour tout réel x de $]-\infty; e[\cup]e; +\infty[$, on a : $g_m(x) > 0$.
- Si $m > e$, on a $1 - \ln m < 0$.

Sur l'intervalle $]-\infty; \ln m]$, la fonction g_m est continue et strictement décroissante. En outre, on a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = +\infty$ et $g_m(\ln m) = m(1 - \ln m) < 0$.

Ainsi, la fonction g_m prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $[m(1 - \ln m); +\infty[$. En particulier, il existe une unique valeur α_1 dans l'intervalle $]-\infty; \ln m]$, solution de l'équation $g_m(x) = 0$.

La décroissance stricte de g_m permet alors de conclure :

- Si $x \in]-\infty; \alpha_1[$, $g_m(x) > 0$.
- $g_m(\alpha_1) = 0$.
- Si $x \in]\alpha_1; \ln m]$, $g_m(x) < 0$.

Sur l'intervalle $[\ln m; +\infty[$, la fonction g_m est continue et strictement croissante.

En outre, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_m(x) = +\infty$ et $g_m(\ln m) = m(1 - \ln m) < 0$.

Ainsi, la fonction g_m prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $[m(1 - \ln m); +\infty[$. En particulier, il existe une unique valeur α_2 dans l'intervalle $[\ln m; +\infty[$, solution de l'équation $g_m(x) = 0$.

La croissance stricte de g_m permet alors de conclure :

- Si $x \in [\ln m; \alpha_2[$, $g_m(x) < 0$.
- $g_m(\alpha_2) = 0$.
- Si $x \in]\alpha_2; +\infty[$, $g_m(x) > 0$.

En définitive :

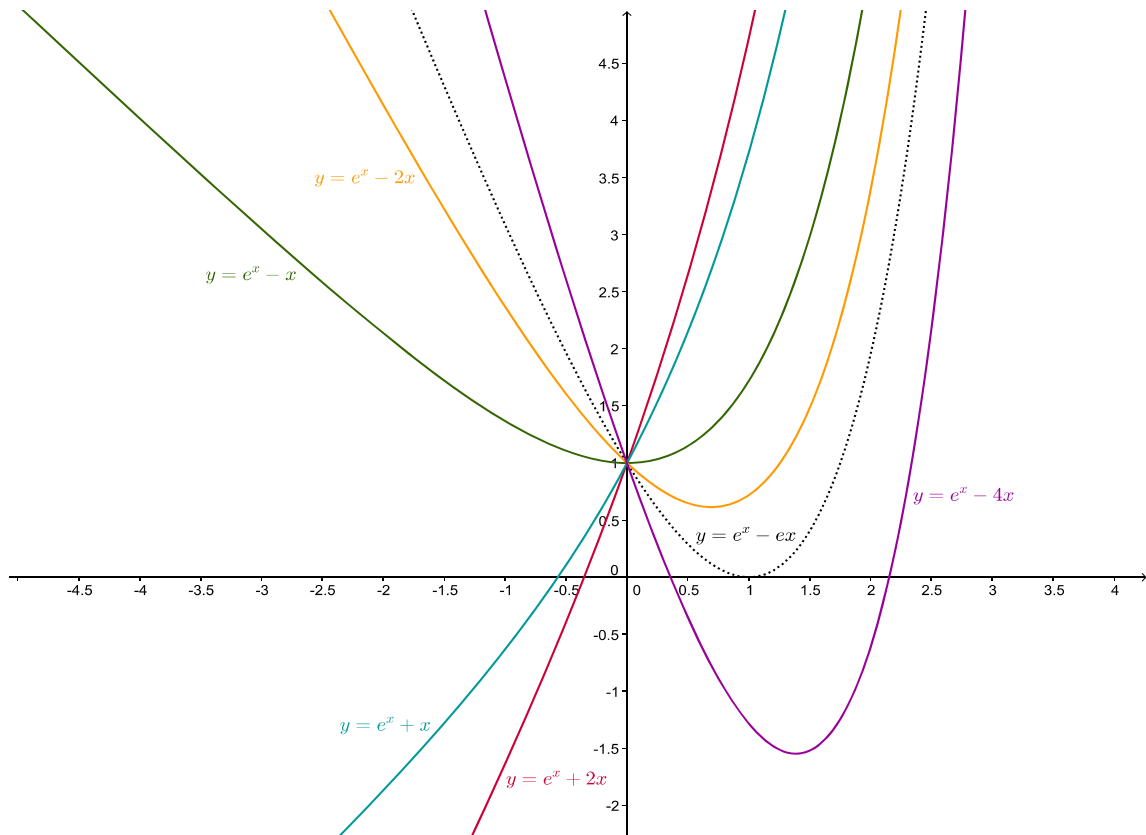
- Si $x \in]-\infty; \alpha_1[\cup]\alpha_2; +\infty[$, $g_m(x) > 0$.
- Si $x \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $g_m(x) = 0$.
- $x \in]\alpha_1; \alpha_2[$, $g_m(x) < 0$.

Remarque : comme $g_m(0) = 1$ et $g_m(1) = e - m < 0$, on peut affirmer que le réel α_1 appartient à l'intervalle $]0; 1[$. Par ailleurs, on peut facilement montrer qu'on a (dans la situation qui nous intéresse ici : $m > e$) : $g_m(2 \ln m) > 0$. On en déduit ainsi que le réel α_2 appartient à l'intervalle $]\ln m; 2 \ln m[$.

Finalelement :

- Si $m < 0$, il existe un réel α strictement négatif tel que :
 - Si $x < \alpha$ alors $g_m(x) < 0$.
 - $g_m(\alpha) = 0$.
 - Si $x > \alpha$ alors $g_m(x) > 0$.
- Si $m \in]0; e[$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_m(x) > 0$.
- Si $m = e$, on a : $g_e(1) = 0$ et pour tout réel x de $]-\infty; e[\cup]e; +\infty[$, on a : $g_m(x) > 0$.
- Si $m > e$, il existe un réel α_1 dans l'intervalle $]0; 1[$ et un réel α_2 dans l'intervalle $]\ln m; 2 \ln m[$ tels que :
 - Si $x \in]-\infty; \alpha_1[\cup]\alpha_2; +\infty[$, $g_m(x) > 0$.
 - Si $x \in \{\alpha_1, \alpha_2\}$, $g_m(x) = 0$.
 - $x \in]\alpha_1; \alpha_2[$, $g_m(x) < 0$.

6. La discussion menée précédemment nous conduit à envisager un certain nombre de valeurs pour le réel m . Nous avons retenu ici les valeurs suivantes : -2 , -1 , 1 , e , 2 et 4 .



2^{ème} partie

Etude des fonctions f_m

1. Pour m réel non nul, la fonction f_m est définie par :

$$f_m(x) = \frac{e^x}{e^x - mx} = \frac{e^x}{g_m(x)}$$

La fonction exponentielle et la fonction g_m étant définies sur \mathbb{R} , on en déduit immédiatement que $f_m(x)$ existe si, et seulement si $g_m(x)$ est non nul.

En utilisant le résultat de la question 5 de la 1^{ère} partie, on peut directement conclure :

- Si $m < 0$, il existe un unique réel α , strictement négatif, tel que $g_m(\alpha) = 0$ et on a : $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha\}$.
- Si $m \in]0; e[$, on a : $\forall x \in \mathbb{R}, g_m(x) > 0$ et $D_m = \mathbb{R}$.
- Si $m = e$, on a : $g_e(x) = 0$ si, et seulement si, $x = 1$ et $D_m = \mathbb{R} - \{1\}$.
- Si $m > e$, on a : $g_m(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \alpha_1$ ou $x = \alpha_2$ et $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha_1; \alpha_2\}$.

2. Si $m < 0$

Il existe un réel α , strictement négatif, tel que $g_m(\alpha) = 0$ et on a : $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha\}$.

On doit donc étudier les limites de la fonction f_m en $-\infty$, en α à gauche, en α à droite et en $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = -\infty$. On en déduit (rapport) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = 0$.

La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet ainsi en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

Pour tout réel x , on a $e^x > 0$. Le signe de $f_m(x) - 0 = f_m(x) = \frac{e^x}{g_m(x)}$ est donc celui de

$g_m(x)$. D'après la question 5 de la première partie, il vient :

- Si $x < \alpha$, on a $g_m(x) < 0$ et donc $f_m(x) - 0 < 0$: la courbe C_m est située sous l'asymptote.
- Si $x > \alpha$, on a $g_m(x) > 0$ et donc $f_m(x) - 0 > 0$: la courbe C_m est située au-dessus l'asymptote.

On a : $\lim_{x \rightarrow \alpha} e^x = e^\alpha > 0$. Comme $g_m(x) < 0$ pour tout x réel strictement inférieur à α , il

vient : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} g_m(x) = 0^-$. On en déduit (rapport) : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x < \alpha}} f_m(x) = -\infty$.

Comme $g_m(x) > 0$ pour tout x réel strictement supérieur à α , il vient : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} g_m(x) = 0^+$.

On en déduit (rapport) : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha \\ x > \alpha}} f_m(x) = +\infty$.

La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha$.

Pour tout réel x dans $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha\}$, on a : $f_m(x) = \frac{e^x}{e^x - mx} = \frac{1}{1 - m \frac{x}{e^x}}$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ (croissance comparée), on a immédiatement : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$.

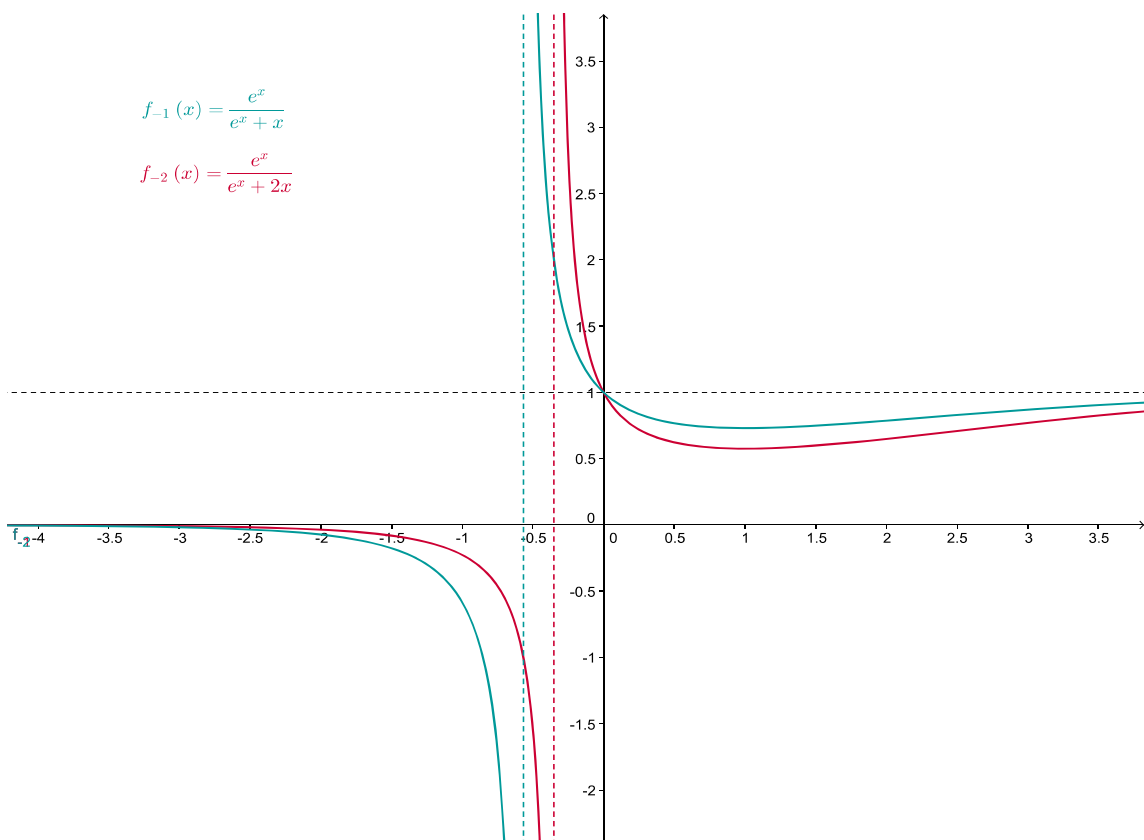
La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet ainsi en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

$$\text{On a, par ailleurs : } f_m(x) - 1 = \frac{e^x}{e^x - mx} - 1 = \frac{e^x - e^x + mx}{e^x - mx} = \frac{mx}{g_m(x)}.$$

D'après la question 5 de la première partie, il vient alors :

- Si $x < \alpha$, on a $g_m(x) < 0$ et $mx > 0$. Donc $f_m(x) - 1 < 0$: la courbe C_m est située sous l'asymptote.
- Si $x \in]\alpha; 0[$, on a $g_m(x) > 0$ et $mx > 0$. Donc $f_m(x) - 1 > 0$: la courbe C_m est située au-dessus de l'asymptote.
- Si $x = 0$, $f_m(x) - 1 = 0$: la courbe C_m coupe l'asymptote.
- Si $x > 0$, on a $g_m(x) > 0$ et $mx < 0$. Donc $f_m(x) - 1 < 0$: la courbe C_m est située sous l'asymptote.

Bien que ce ne soit pas demandé, nous fournissons ci-dessous la courbe représentative des fonctions f_{-1} (pour laquelle $\alpha \simeq -0,56714$) et f_{-2} (pour laquelle $\alpha \simeq -0,35173$).



$$\boxed{\text{Si } m \in]0; e[}$$

Le domaine de définition de la fonction f_m est \mathbb{R} .

On doit donc étudier les limites de la fonction f_m en $-\infty$ et en $+\infty$.

Rappelons que dans ce cas, pour tout x réel, on a : $g_m(x) > 0$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = +\infty$. On en déduit (rapport) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = 0$.

La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet ainsi en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

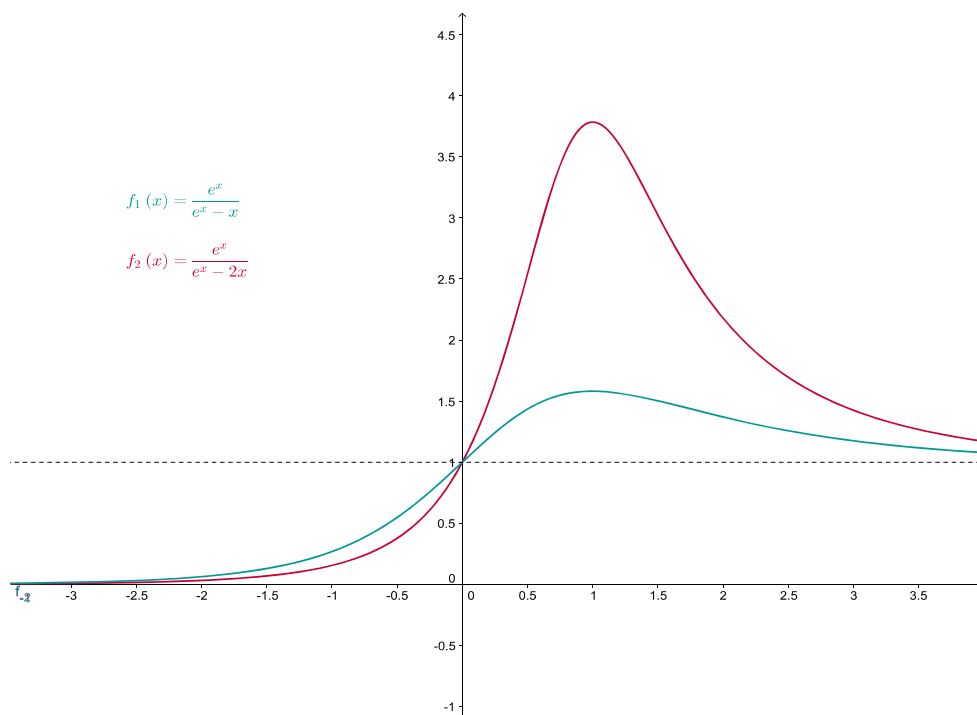
Pour tout réel x , on a $e^x > 0$ et $g_m(x) > 0$. La différence $f_m(x) - 0 = f_m(x) = \frac{e^x}{g_m(x)}$ est donc strictement positive et la courbe C_m est située au-dessus l'asymptote.

On a encore : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$ et la courbe représentative C_m de la fonction f_m admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

On a, par ailleurs : $f_m(x) - 1 = \frac{mx}{g_m(x)}$ est du signe de x puisque pour tout x réel, on a :

$$\frac{m}{g_m(x)} > 0. \text{ D'où :}$$

- Si $x < 0$, on a $f_m(x) - 1 < 0$: la courbe C_m est située sous l'asymptote.
- Si $x = 0$, $f_m(x) - 1 = 0$: la courbe C_m coupe l'asymptote.
- Si $x > 0$, on a $f_m(x) - 1 > 0$: la courbe C_m est située au-dessus l'asymptote.



Si $m = e$

On a : $D_e = \mathbb{R} - \{1\}$.

On doit donc étudier les limites de la fonction f_e en $-\infty$, en 1 à gauche, en 1 à droite et en $+\infty$.

Rappelons que dans ce cas, pour tout x réel différent de 1, on a : $g_e(x) > 0$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_e(x) = +\infty$. On en déduit (rapport) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_e(x) = 0$.

La courbe représentative C_e de la fonction f_e admet ainsi en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

Pour tout réel x , on a $e^x > 0$ et $g_e(x) > 0$. La différence $f_e(x) - 0 = f_e(x) = \frac{e^x}{g_e(x)}$ est donc strictement positive et la courbe C_e est située au-dessus l'asymptote.

On a : $\lim_{x \rightarrow 1^-} e^x = e^1 > 0$. Comme $g_m(x) > 0$ pour tout x réel différent de 1, il vient :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} g_e(x) = 0^+$. On en déduit (rapport) : $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_e(x) = +\infty$.

On raisonne de façon similaire à droite de 1 pour obtenir le même résultat :

$\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f_e(x) = +\infty$.

La courbe représentative C_e de la fonction f_e admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

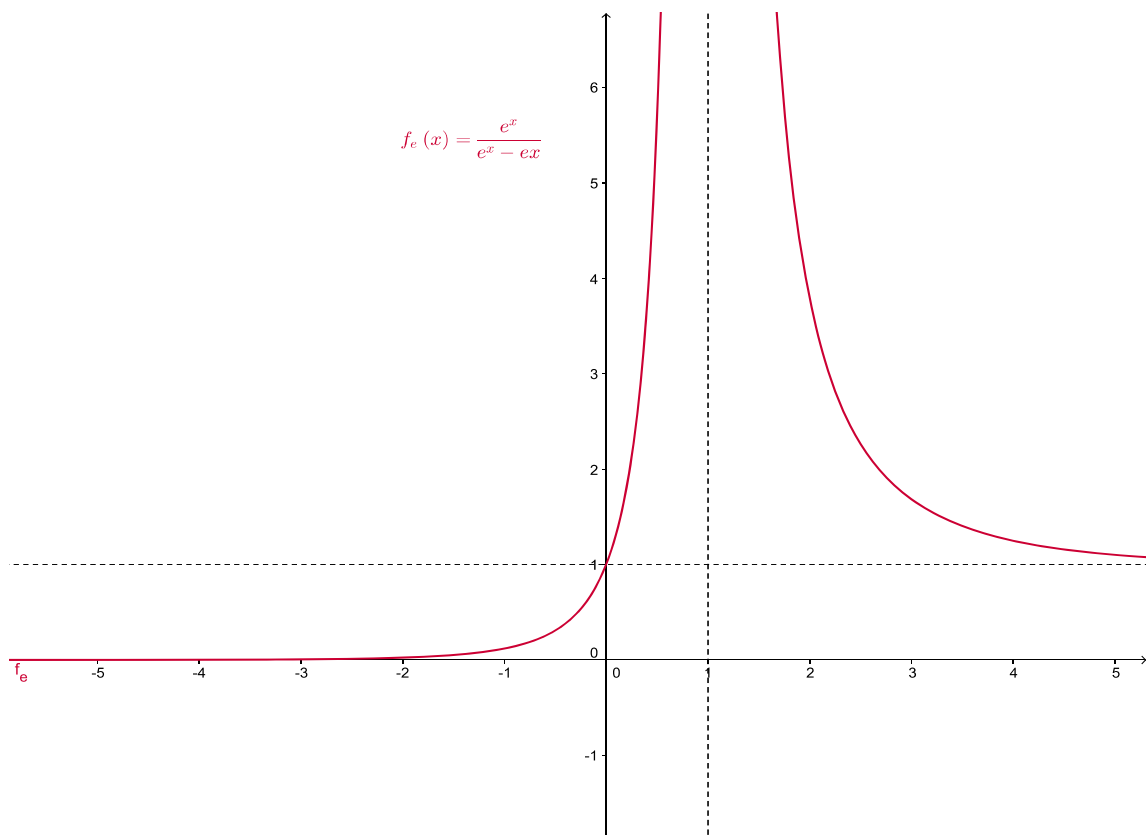
On a encore : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_e(x) = 1$ et la courbe représentative C_e de la fonction f_e admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

On a, par ailleurs : $f_e(x) - 1 = \frac{ex}{g_e(x)}$ est du signe de x puisque pour tout x réel, on a :

$\frac{e}{g_e(x)} > 0$. D'où, comme précédemment :

- Si $x < 0$, la courbe C_e est située sous l'asymptote.
- Si $x = 0$, la courbe C_e coupe l'asymptote.
- Si $x > 0$, la courbe C_e est située au-dessus l'asymptote.

A la page suivante, nous avons fourni la courbe représentative de la fonction f_e .



Si $m > e$

On a $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha_1 ; \alpha_2\}$.

On doit donc étudier les limites de la fonction f_m en $-\infty$, en α_1 à gauche, en α_1 à droite, en α_2 à gauche, en α_2 à droite et en $+\infty$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g_m(x) = +\infty$. On en déduit (rapport) : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = 0$.

La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet ainsi en $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ (axe des abscisses).

Comme la fonction exponentielle prend des valeurs strictement positives, la différence

$$f_m(x) - 0 = f_m(x) = \frac{e^x}{g_m(x)} \text{ est du signe de } g_m(x) :$$

- Si $x \in]-\infty ; \alpha_1[\cup]\alpha_2 ; +\infty[$, on a $g_m(x) > 0$ et la courbe C_m est située au-dessus l'asymptote.
- Si $x \in]\alpha_1 ; \alpha_2[$, on a $g_m(x) < 0$ et la courbe C_m est située en dessous de l'asymptote.

On a : $\lim_{x \rightarrow \alpha_1} e^x = e^{\alpha_1} > 0$. Comme $g_m(x) > 0$ pour tout x réel strictement inférieur à α_1 , il

vient : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_1 \\ x < \alpha_1}} g_m(x) = 0^+$. On en déduit (rapport) : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_1 \\ x < \alpha_1}} f_m(x) = +\infty$.

Comme $g_m(x) < 0$ pour tout x réel dans $]\alpha_1; \alpha_2[$, il vient : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_1 \\ x > \alpha_1}} g_m(x) = 0^-$. On en déduit

(rapport) : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_1 \\ x > \alpha_1}} f_m(x) = -\infty$.

La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha_1$.

Comme $g_m(x) < 0$ pour tout x réel dans $]\alpha_1; \alpha_2[$, il vient : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_2 \\ x < \alpha_2}} g_m(x) = 0^-$. On en déduit

(rapport) : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_2 \\ x < \alpha_2}} f_m(x) = -\infty$.

Comme $g_m(x) > 0$ pour tout x réel strictement supérieur à α_2 , il vient : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_2 \\ x > \alpha_2}} g_m(x) = 0^+$.

On en déduit (rapport) : $\lim_{\substack{x \rightarrow \alpha_2 \\ x > \alpha_2}} f_m(x) = +\infty$.

La courbe représentative C_m de la fonction f_m admet une asymptote verticale d'équation $x = \alpha_2$.

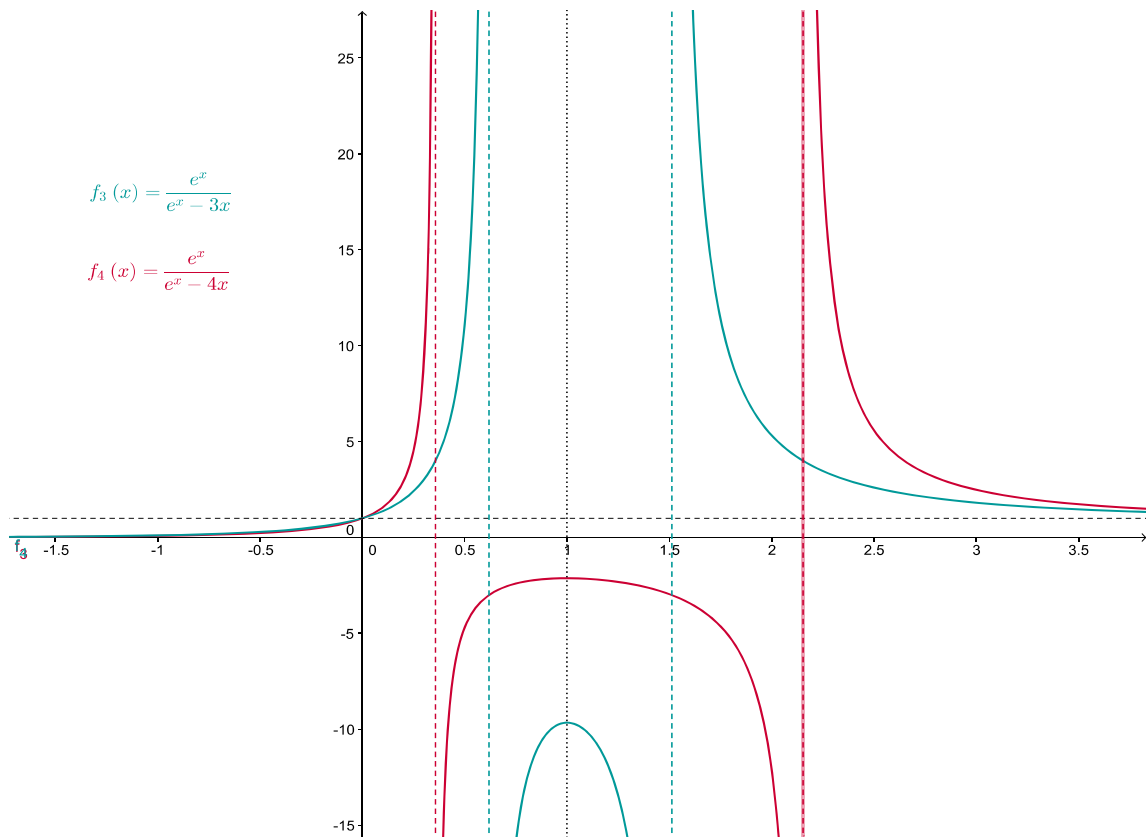
On a encore : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = 1$ et la courbe représentative C_m de la fonction f_m admet en $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$.

On a, par ailleurs : $f_m(x) - 1 = \frac{mx}{g_m(x)}$ est du signe de x puisque pour tout x réel, on a :

$\frac{m}{g_m(x)} > 0$. D'où :

- Si $x < 0$, on a $f_m(x) - 1 < 0$: la courbe C_m est située sous l'asymptote.
- Si $x = 0$, $f_m(x) - 1 = 0$: la courbe C_m coupe l'asymptote.
- Si $x \in \mathbb{R}_+^* - \{\alpha_1, \alpha_2\}$, on a $f_m(x) - 1 > 0$: la courbe C_m est située au-dessus l'asymptote.

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_3 (pour laquelle $\alpha_1 \approx 0,619\,06$ et $\alpha_2 \approx 1,512\,13$) et f_4 (pour laquelle $\alpha_1 \approx 0,357\,40$ et $\alpha_2 \approx 2,153\,29$).



On constate, en définitive, que toutes les courbes C_m admettent pour asymptote la droite d'équation $y = 1$.

3. Soit m réel non nul. La fonction f_m est le rapport de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} : la fonction exponentielle et la fonction g_m . Pour tout réel x tel que $g_m(x) \neq 0$, c'est-à-dire pour tout réel x de D_m , on a alors :

$$\begin{aligned}
 f_m'(x) &= \frac{e^x \times g_m(x) - e^x \times g_m'(x)}{(g_m(x))^2} \\
 &= e^x \frac{g_m(x) - g_m'(x)}{(g_m(x))^2} \\
 &= e^x \frac{e^x - mx - (e^x - m)}{(e^x - mx)^2} \\
 &= e^x \frac{m(1-x)}{(e^x - mx)^2}
 \end{aligned}$$

On a bien :

$$\forall x \in D_m, f_m'(x) = m \frac{e^x(1-x)}{(e^x - mx)^2}$$

4. Pour tout réel x de D_m , on a : $\frac{e^x}{(e^x - mx)^2} > 0$. Le signe de $f_m'(x)$ est donc celui du produit $m(1-x)$.

Si $m < 0$

On a $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha\}$ avec $\alpha < 0$.

On a immédiatement :

- Pour tout réel x de $]-\infty; \alpha[\cup]\alpha; 1[$ on a $1-x > 0$ et donc $m(1-x) < 0$. Il vient alors : $f_m'(x) < 0$.
- Pour $x = 1$, $f_m'(x) = 0$.
- Pour tout réel x de $]1; +\infty[$ on a $1-x < 0$ et donc $m(1-x) > 0$. Il vient alors : $f_m'(x) > 0$.

Dans ce cas :

- La fonction f_m est strictement décroissante sur les intervalles $]-\infty; \alpha[$ et $]\alpha; 1]$.
- La fonction f_m est strictement croissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

La fonction f_m admet donc un minimum pour $x = 1$ et $f_m(1) = \frac{e^1}{e^1 - m \times 1} = \frac{e}{e - m}$.

Si $m \in]0; e[$

On a $D_m = \mathbb{R}$.

Il vient immédiatement :

- Pour tout réel x de $]-\infty; 1[$ on a $1-x > 0$ et donc $m(1-x) > 0$. Il vient alors : $f_m'(x) > 0$.
- Pour $x = 1$, $f_m'(x) = 0$.
- Pour tout réel x de $]1; +\infty[$ on a $1-x < 0$ et donc $m(1-x) < 0$. Il vient alors : $f_m'(x) < 0$.

Dans ce cas :

- La fonction f_m est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; 1]$.
- La fonction f_m est strictement décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

La fonction admet donc un maximum pour $x = 1$ et $f_m(1) = \frac{e}{e-m}$.

Si $m = e$

On a $D_e = \mathbb{R} - \{1\}$.

On a immédiatement :

- Pour tout réel x de $]-\infty; 1[$ on a $1-x > 0$ et donc $m(1-x) > 0$. Il vient alors :
 $f_m'(x) > 0$.
- Pour tout réel x de $]1; +\infty[$ on a $1-x < 0$ et donc $m(1-x) < 0$. Il vient alors :
 $f_m'(x) < 0$.

Dans ce cas :

- La fonction f_m est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty; 1[$.
- La fonction f_m est strictement décroissante sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

Si $m > e$

On a $D_m = \mathbb{R} - \{\alpha_1; \alpha_2\}$ avec $\alpha_1 \in]0; 1[$ et $\alpha_2 \in]\ln m; 2\ln m[$.

On a immédiatement :

- Pour tout réel x de $]-\infty; \alpha_1[\cup]\alpha_1; 1[$ on a $1-x > 0$ et donc $m(1-x) > 0$. Il vient alors : $f_m'(x) > 0$.
- Pour $x = 1$, $f_m'(x) = 0$.
- Pour tout réel x de $]1; \alpha_2[\cup]\alpha_2; +\infty[$ on a $1-x < 0$ et donc $m(1-x) < 0$. Il vient alors : $f_m'(x) < 0$.

Dans ce cas :

- La fonction f_m est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty; \alpha_1[$ et $]\alpha_1; 1]$.
- La fonction f_m est strictement décroissante sur les intervalles $]1; \alpha_2[$ et $]\alpha_2; +\infty[$.

La fonction admet donc un maximum pour $x = 1$ et $f_m(1) = \frac{e}{e-m}$.

Ainsi, pour tout réel m non nul différent de e , la fonction f_m admet un extremum :

- Si $m < 0$, la fonction f_m admet un minimum pour $x = 1$ et on a $f_m(1) = \frac{e}{e-m}$.
- Si $m \in]0; e[\cup]e; +\infty[$, la fonction f_m admet un maximum pour $x = 1$ et on a $f_m(1) = \frac{e}{e-m}$.

Tous les extrema sont donc situés sur la droite d'équation $x = 1$.

Soit maintenant $M(1; y)$. Existe-t-il une valeur de m telle que M soit un extremum de la courbe C_m ?

Il faudrait avoir : $y = f_m(1) = \frac{e}{e-m}$. Soit : $(y-1)e = my$.

On élimine la valeur $y = 1$ car elle conduirait à $m = 0$.

Ensuite, pour $y \neq 0$, il vient : $m = \frac{(y-1)e}{y} = e \left(1 - \frac{1}{y} \right)$.

On en conclut :

Tout point de la droite d'équation $x = 1$ hormis les points $(1; 0)$ et $(1; 1)$ est un extremum d'une courbe C_m .

5. Si $m < 0$

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'_m(x)$	-		-	+
f_m	$+\infty$	$-\infty$	$\frac{e}{e-m}$	$+\infty$

Si $m \in]0; e[$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_m(x)$	+		-
f_m	$\frac{e}{e-m}$		
	0		1

Si $m = e$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'_e(x)$	+		-
f_e	$+\infty$		
	0		1

Si $m > e$

x	$-\infty$	α_1	1	α_2	$+\infty$
$f'_e(x)$	+		0	-	
f_e	$+\infty$		$\frac{e}{e-m}$		$+\infty$
	0		$-\infty$	$-\infty$	1

6. On cherche un point $M(a; b)$ tel que pour tout m non nul M appartienne à C_m .

On a alors :

$$\begin{aligned} & \forall m \in \mathbb{R}^*, M(a; b) \in C_m \\ & \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^*, b = f_m(a) \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^*, b = \frac{e^a}{e^a - ma} \\ & \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^*, b = \frac{e^a}{e^a - ma} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^* \begin{cases} e^a - ma \neq 0 \\ b(e^a - ma) = e^a \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}^* \begin{cases} e^a - ma \neq 0 \\ mab + (1-b)e^a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \forall m \in \mathbb{R}^* e^a - ma \neq 0 \\ ab = 0 \\ 1 - b = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Toutes les courbes C_m passent par le point $A(0; 1)$.

7. Nous avons représenté ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f_m pour les six valeurs de m suivantes : $-2, -1, 1, 2, e$ et 5 .

