

Lycée Fénélon Sainte-Marie

Préparation concours Sciences-Po

Concours blanc de Mathématiques

Mai 2012

Durée : 4 heures

Tout document interdit.

La calculatrice graphique type « lycée » est autorisée.

Toute réponse doit être soigneusement justifiée,
la précision et la qualité de la rédaction
entrant pour une part importante dans l'évaluation.

Les deux problèmes proposés sont indépendants
et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.

Le sujet comporte un total de 8 pages
(y compris cette page de garde).

1^{er} Problème : étude d'une famille de fonctions

Dans ce problème, on se propose d'étudier la famille de fonctions définie par :

$$f_m : x \mapsto \frac{e^x}{e^x - mx}$$

où m est un réel non nul.

On note C_m la courbe représentative de la fonction f_m dans un repère orthogonal.

1^{ère} partie **Etude d'une première famille de fonctions**

Etude de la famille de fonctions définie par :

$$g_m : x \mapsto e^x - mx$$

où m est un réel non nul.

On note \mathcal{C}_m la courbe représentative de la fonction g_m dans un repère orthogonal.

1. Donner le domaine de définition \mathcal{D}_m de la fonction g_m .
2. Déterminer les limites de la fonction g_m aux bornes de son domaine de définition.
On précisera les asymptotes éventuelles et, le cas échéant, on précisera la position de \mathcal{C}_m par rapport à son(ses) asymptote(s).
3. Etudier les variations de la fonction g_m .
4. Dresser le tableau de variation de la fonction g_m .
5. Donner le signe de $g_m(x)$.
6. Donner, pour différentes valeurs de m représentatives des diverses situations rencontrées, les allures des courbes \mathcal{C}_m correspondantes.

2^{ème} partie

Etude des fonctions f_m

1. En vous aidant de la question 5 de la première partie, donner le domaine de définition D_m de la fonction f_m .
2. Déterminer les limites de la fonction f_m aux bornes de son domaine de définition.
On précisera les asymptotes éventuelles et, le cas échéant, on précisera la position de C_m par rapport à son(s) asymptote(s) (on montrera, en particulier, que toutes les courbes C_m admettent une même asymptote dont on précisera une équation).
3. Montrer que l'on a, pour tout réel x de D_m :

$$f'_m(x) = m \frac{e^x(1-x)}{(e^x - mx)^2}$$

4. Etudier les variations de la fonction f_m .
On montrera, en particulier, que pour tout réel m non nul différent de e , la fonction f_m admet un extremum et que tous les points correspondants appartiennent à une même droite dont on précisera l'équation. Tout point de cette droite est-il un extremum d'une certaine courbe C_m ?
5. Dresser le tableau de variation de la fonction f_m .
6. Montrer que toutes les courbes C_m passent par un même point dont on précisera les coordonnées.
7. Donner, pour différentes valeurs de m représentatives des diverses situations rencontrées, les allures des courbes C_m correspondantes.

2^{ème} problème : une formule célèbre

On rappelle que pour tout entier naturel n , on définit « la factorielle de n », notée $n!$ comme suit :

$$\begin{aligned} \text{Si } n > 0, n! &= 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n \\ 0! &= 1 \end{aligned}$$

Le principal objectif de ce problème est de démontrer le célèbre résultat suivant, dû au mathématicien écossais James STIRLING (1692-1770) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$$

On rappelle que si (u_n) et (v_n) sont deux suites vérifiant : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$ alors, pour n

« grand », on peut utiliser l'une des expressions u_n ou v_n pour approcher l'autre. Ainsi, la formule de Stirling permet d'approcher $n!$ par $\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

1^{ère} partie Calcul des intégrales de Wallis

Dans cette partie, on s'intéresse aux intégrales de WALLIS (mathématicien anglais. 1616-1703) définies par :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt$$

où n est un entier naturel.

1. Calculer W_0 et W_1 .

2. a. Justifier l'inégalité : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n \geq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(t) dt$.

b. En utilisant $\cos(t) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, montrer que l'on a : $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^n(t) dt > 0$ puis $W_n > 0$.

3. Montrer que pour tout n entier naturel, on a :

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

Indication : on utilisera $\cos^{n+2}(t) = \cos^2(t)\cos^n(t) = \cos^n(t) - \sin^2(t)\cos^n(t)$ et on pensera à intégrer par parties.

4. Montrer que pour tout p entier naturel, on a :

$$W_{2p} = \frac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2} \frac{\pi}{2} \text{ et } W_{2p+1} = \frac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$$

5. Calculer W_2 , W_3 et W_4 .

6. a. En reprenant la définition de W_n , montrer que la suite (W_n) est décroissante puis en déduire que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$1 \leq \frac{W_{n-1}}{W_n} \leq \frac{W_{n-2}}{W_n}$$

b. En utilisant le résultat de la question 3. déduire de la question précédente que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n-1}}{W_n} = 1$$

c. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, nW_{n-1}W_n = \frac{\pi}{2}.$$

d. Déduire des deux questions précédentes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (nW_n^2) = \frac{\pi}{2}$$

e. En déduire enfin la formule de WALLIS :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_n}{\sqrt{\frac{\pi}{2n}}} = 1$$

f. Donner une valeur approchée de W_{20} et la comparer à la valeur exacte : $W_{20} = \frac{46189 \pi}{524288}$.

2^{ème} partie

La formule de Stirling

On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{n!}{\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n}$$

On définit ensuite la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = \ln(u_n)$$

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_{n+1} - v_n = f(n)$$

où f est la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = 1 - \left(x + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la fonction f .

a. Dresser le tableau de variation de la fonction f' sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

b. Montrer que pour tout réel x dans l'intervalle $[1; +\infty[$, on a l'encadrement :

$$\frac{1}{x+1} \leq \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$$

Indication : on étudiera les fonctions $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}$ et $x \mapsto \frac{1}{x} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$

sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

On définit maintenant la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, w_n = v_n - \frac{1}{12n}$$

3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$w_{n+1} - w_n = g(n)$$

où g est la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{12} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} \right)$$

4. Dans cette question, on se propose d'étudier la fonction g .

a. Dresser le tableau de variation de la fonction g' sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

b. Dresser le tableau de variation de la fonction g sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

5. Dédurre des questions précédentes que les suites $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

Montrer alors que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite L strictement positive.

6. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$W_{2n} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} \frac{u_{2n}}{(u_n)^2}$$

En déduire alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{2n}}{\frac{\pi}{\sqrt{2n}}} = \frac{1}{L}$$

7. En utilisant la question 6.e. de la première partie, montrer que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{2n}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}} = 1$$

8. Dédurre des deux questions précédentes que l'on a : $L = \sqrt{2\pi}$ et obtenir finalement la formule de Stirling.

3^{ème} partie

Deux applications : un jeu et une loi limite

Un jeu

On considère une pièce bien équilibrée que l'on lance $2n$ fois (n est un entier naturel non nul). On s'intéresse à la variable aléatoire X correspondant au nombre de « FACE » obtenus et on pose $p_n = p(X = n)$.

1. Préciser, en justifiant, la loi suivie par X et en donner les paramètres.
2. Exprimer p_n en fonction de n .
3. Grâce à la formule de Stirling obtenue à la partie précédente, montrer que l'on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n \sqrt{\pi n} = 1$$

4. Dédurre de la question précédente la limite de p_n et commenter le résultat obtenu.

Une loi limite

On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour tout n entier naturel non nul, X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p_n .

On suppose que pour tout entier naturel n non nul, on a : $E(X_n) = n \times p_n = \lambda$ où λ est un réel strictement positif fixé (toutes les variables aléatoires X_n admettent la même espérance).

Soit k un entier naturel fixé.

1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul supérieur à k , on a :

$$p(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(\frac{n-\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

2. Montrer que l'on peut écrire la probabilité précédente :

$$p(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \times \frac{n!}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n} \times \frac{\sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}}{(n-k)!} \times \sqrt{\frac{n}{n-k}} \times e^{-k} \times \left(\frac{1-\frac{k}{n}}{1-\frac{\lambda}{n}}\right)^k \times \left(\frac{1-\frac{\lambda}{n}}{1-\frac{k}{n}}\right)^n$$

3. On rappelle que l'on a, pour tout réel a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$. Montrer alors que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p(X_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$