Lycée Fénelon Sainte-Marie

Préparation Science-Po/prépa HEC

Suites numériques

Version du 2 juillet 2015

Exercice 1 – Sommes

On donne : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Calculer $P = \sum_{k=1}^{n} (2k)^2$ et $I = \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1)^2$.

Indice : on pourra s'intéresser successivement à $P+I$ puis P.

Exercice 2 – Mais que venait-il faire dans cette galère ?

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 positif et de raison r strictement positive.

Pour tout entier naturel n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k+1}}}$.

Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $S_n = \frac{n+1}{\sqrt{u_0} + \sqrt{u_{n+1}}}$.

Exercice 3 – Trompeuses apparences (Episode I)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-100\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x^6 - \frac{1}{x+100}$$

1. D'après votre calculatrice, la fonction f semble-t-elle minorée ?
2. Pour tout entier naturel non nul k, montrer que l'on a :

   $$\forall x \in \left]-100\,;-100+10^{-k}\right[,\ f(x) < 10^{12} - 10^k$$

   Reprendre alors la réponse fournie à la première question …

Exercice 4 – Trompeuses apparences (Episode II)

Soit (u_n) la suite réelle définie par :

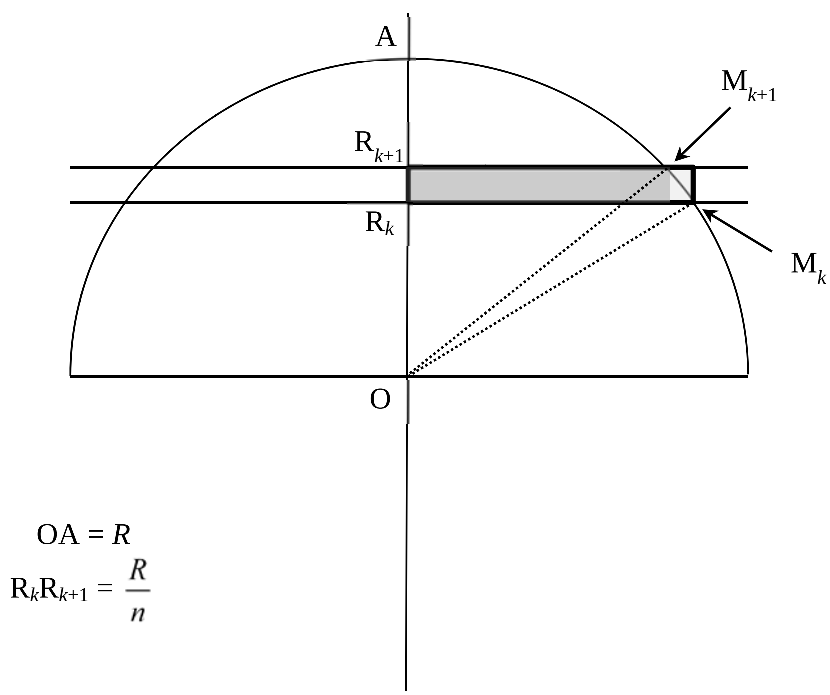
$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{6}\left(n^2 - 3n + 8\right) \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3, u_4 et u_5 puis conjecturer une formule explicite pour u_n.
2. Calculer u_6. Conclusion ?

Exercice 5 – Le volume de la sphère

Dans cet exercice, nous allons en fait calculer le volume d'une demi-sphère.

L'idée fondamentale consiste à la découper en tranches de même épaisseur infinitésimale … (voir figure ci-après).



On désigne par O le centre de la sphère et on considère A un point quelconque sur celle-ci. On considère alors la demi-sphère contenant A et telle que la droite (OA) soit son axe de révolution.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Sur le segment $\left[\mathrm{OA}\right]$, on va alors considérer les $n+1$ points $\mathrm{R}_0 = \mathrm{O}, R_1, R_2, ..., R_n = A$ rangés dans cet ordre et tels que pour tout entier naturel k compris entre 0 et $n-1$, on ait : $R_k R_{k+1} = \frac{R}{n}$ (on a donc $OR_k = k\frac{R}{n}$).

On découpe alors la demi-sphère à l'aide des plans orthogonaux à la droite $\left(\mathrm{OA}\right)$ et passant par les points $\mathrm{R}_0 = \mathrm{O}, R_1, R_2, ..., R_n = A$. On peut alors considérer $2n$ cylindres de révolution d'axe $\left(\mathrm{OA}\right)$ et de hauteur $\frac{R}{n}$:

- n cylindres intérieurs.
- n cylindres extérieurs.

1. En considérant respectivement les cylindres intérieurs puis les cylindres extérieurs, encadrer le volume $\mathscr{V}$ de la demi-sphère par deux suites $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$.
2. En utilisant $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n\left(n+1\right)\left(2n+1\right)}{6}$, montrer que l'on a :
$$u_n = \frac{4n^2 - 3n - 1}{6n^2}\pi R^3 \text{ et } v_n = \frac{4n^2 + 3n - 1}{6n^2}\pi R^3$$
3. Faire tendre n vers $+\infty$ et conclure.

Exercice 6 – Moyenne géométrique

Soit $\left(u_n\right)$ une suite géométrique à termes strictement positifs.

1. Montrer que l'on a :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$$
2. On montre (par récurrence) que si une suite $\left(u_n\right)$ à termes strictement positifs vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$ alors on a affaire à une suite géométrique.
Les nombres 24 157 817, 39 088 169 et 63 245 986 sont-ils trois termes consécutifs d'une suite géométrique ?

Exercice 7 – L'un dans l'autre

On considère la suite réelle (u_n) dont les premiers termes sont :

$$u_0 = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}, \frac{2^2}{3^3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2^3}{3^4}, \frac{2^2}{3^3}, \ldots$$

1. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont géométriques et donner en fonction de *n* les expressions de u_{2n} et de u_{2n+1}.
2. Pour tout entier naturel *n*, calculer $u_0 + u_2 + u_4 + ... + u_{2n}$ et $u_1 + u_3 + u_5 + ... + u_{2n+1}$.
3. Pour tout entier naturel *n*, calculer $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n$.
   (On distinguera deux cas.)

Exercice 8 – Epargne

Une personne gagne un salaire annuel constant *S*. Elle n'a besoin que de la moitié pour vivre et épargne l'autre moitié au taux annuel de 6% les intérêts étant composés annuellement.

Pendant combien d'année cette personne doit-elle travailler pour pouvoir s'arrêter et vivre de ses rentes ?

1. Montrer que la somme E_n épargnée au bout de *n* années, vaut :
$$\mathrm{E}_n = \frac{S}{2}\left(1,06^{n-1} + 1,06^{n-2} + ... + 1,06 + 1\right)$$
2. Montrer que la résolution du problème revient à résoudre l'équation :
$$0,06\,\mathrm{E}_n = \frac{S}{2}$$
   Conclure.
3. Quelles critiques pouvez-vous formuler sur cette situation modélisée ?

Corrigés

Exercice 1 – Sommes

Calculer $P=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2$ et $I=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2$.

Indice : on pourra s'intéresser successivement à $P+I$ puis P.

Dans un premier temps notons que :

- $P=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=2^2+4^2+\ldots+(2n)^2$ est la somme des carrés des n premiers nombres pairs non nuls.
- $I=\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2=1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2$ est la somme des carrés des n premiers nombres impairs non nuls.

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}P+I&=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2+\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2\\&=2^2+4^2+\ldots+(2n)^2+1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2\\&=1^2+2^2+3^2+4^2+\ldots+(2n-1)^2+(2n)^2\\&=\sum_{k=1}^{2n}k^2\end{aligned}$$

D'après la donnée $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, il vient :

$$\sum_{k=1}^{2n}k^2=\frac{2n(2n+1)(2\times 2n+1)}{6}=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$$

On a donc : $P+I=\frac{n(2n+1)(4n+1)}{3}$.

Par ailleurs : $P=\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{n}4\times k^2=4\times\sum_{k=1}^{n}k^2=4\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$.

D'où :

$$\begin{aligned} I &= (P+I)-P \\ &= \frac{n(2n+1)(4n+1)}{3} - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \\ &= \frac{n(2n+1)}{3}\left[(4n+1)-2(n+1)\right] \\ &= \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3} \\ &= \frac{n(4n^2-1)}{3} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\begin{aligned} P &= \sum_{k=1}^{n}(2k)^2 = 2^2+4^2+\ldots+(2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} \\ I &= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)^2 = 1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3} \end{aligned}}$$

Exercice 2 – Mais que venait-il faire dans cette galère ?

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 positif et de raison *r* strictement positive.

Comme (u_n) est une suite arithmétique, on a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$.
Comme u_0 est positif et *r* strictement positive, il vient immédiatement : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n > 0$ (u_0 peut être nul).
Cette remarque garantit que toutes les fractions apparaissant dans la somme S_n sont bien définies.

Soit alors un entier naturel *n*.
Pour tout entier naturel *k* compris entre 0 et *n*, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{u_k}+\sqrt{u_{k+1}}} = \frac{\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}}{\left(\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}\right)\left(\sqrt{u_{k+1}}+\sqrt{u_k}\right)} = \frac{\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}}{\sqrt{u_{k+1}}^2-\sqrt{u_k}^2} = \frac{\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}}{u_{k+1}-u_k}$$

La suite (u_n) étant arithmétique, on a : $u_{k+1}-u_k = r$.

Finalement : $\dfrac{1}{\sqrt{u_k}+\sqrt{u_{k+1}}} = \dfrac{\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}}{u_{k+1}-u_k} = \dfrac{\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}}{r}$.

Il vient alors :

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{u_k}+\sqrt{u_{k+1}}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}}{r} = \frac{1}{r}\sum_{k=0}^{n}\left(\sqrt{u_{k+1}}-\sqrt{u_k}\right) \\
&= \frac{1}{r}\left[\left(\cancel{\sqrt{u_1}}-\sqrt{u_0}\right)+\left(\cancel{\sqrt{u_2}}-\cancel{\sqrt{u_1}}\right)+\left(\cancel{\sqrt{u_3}}-\cancel{\sqrt{u_2}}\right)+\ldots+\left(\cancel{\sqrt{u_n}}-\cancel{\sqrt{u_{n-1}}}\right)+\left(\sqrt{u_{n+1}}-\cancel{\sqrt{u_n}}\right)\right] \\
&= \frac{\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_0}}{r} = \frac{\left(\sqrt{u_{n+1}}-\sqrt{u_0}\right)\left(\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_0}\right)}{r\left(\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_0}\right)} = \frac{\sqrt{u_{n+1}}^2-\sqrt{u_0}^2}{r\left(\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_0}\right)} \\
&= \frac{u_{n+1}-u_0}{r\left(\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_0}\right)} = \frac{u_0+(n+1)r-u_0}{r\left(\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_0}\right)} \\
&= \frac{n+1}{\sqrt{u_{n+1}}+\sqrt{u_0}}
\end{aligned}
$$

Le résultat est ainsi établi.

Exercice 3 – Trompeuses apparences (Episode I)

1. A la calculatrice (mais pas seulement ! ☺) la fonction ne se laisse pas facilement « tordre le coup » et on peut être amené à modifier plusieurs fois les paramètres de la fenêtre graphique pour finalement obtenir un morceau de la courbe représentative. Il semble alors effectivement que la fonction *f* soit minorée par une valeur proche de 0 ...

2. Soit alors *k* un entier naturel non nul.
   On a $10^{-k} = \frac{1}{10^k} \le \frac{1}{10}$ et donc $\left]-100\,;-100+10^{-k}\right[\subset \mathbb{R}_-$.
   Or, la fonction $x \mapsto x^6$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$.
   On a donc : $x \in \left]-100\,;-100+10^{-k}\right[\Rightarrow x^6 < (-100)^6 = 10^{12}$.

   Par ailleurs :

   $$x \in \left]-100\,;-100+10^{-k}\right[\Leftrightarrow x+100 \in \left]0\,;10^{-k}\right[\Leftrightarrow \frac{1}{x+100} > 10^k \Leftrightarrow -\frac{1}{x+100} < -10^k$$

   Pour tout x réel dans l'intervalle $\left]-100\,;-100+10^{-k}\right[$, on a donc :

   $$x^6 < 10^{12} \text{ et } -\frac{1}{x+100} < -10^k$$

   D'où : $x^6 - \frac{1}{x+100} < 10^{12} - 10^k$, soit, finalement : $f(x) < 10^{12} - 10^k$.

On a bien :

$$\forall x \in \left]-100\,;-100+10^{-k}\right[,\ f(x) < 10^{12} - 10^k$$

La quantité 10^k peut être rendue arbitrairement grande ($\lim_{k\to+\infty} 10^k = +\infty$). La quantité $10^{12} - 10^k$ peut donc être rendue arbitrairement petite ($\lim_{k\to+\infty}\left(10^{12}-10^k\right) = -\infty$).
Ainsi, en se plaçant sur l'intervalle adéquat, en l'occurrence $\left]-100\,;-100+10^{-k}\right[$, on peut rendre $f(x)$ arbitrairement petit. En définitive, on a : $\lim_{\substack{x\to-100\\x>-100}} f(x) = -\infty$ et <u>la fonction *f* n'est pas minorée</u>.

Le comportement de la fonction au voisinage (à droite) de -100 est particulièrement difficile (pour ne pas dire impossible !) à visualiser car sa croissance est extrêmement rapide ! On peut montrer que l'on a :

$$f\left(-100+10^{-13}\right) \simeq -9\times 10^{12}$$
$$f\left(-100+10^{-12}\right) \simeq -6\times 10^{-2}$$
$$f\left(-100+10^{-11}\right) \simeq 9\times 10^{11}$$

Tout logiciel n'est pas à même de mener ces calculs avec la précision souhaitée … Par exemple, les valeurs approchées de $f\left(-100+10^{-13}\right)$ et $f\left(-100+10^{-11}\right)$ peuvent être facilement obtenues avec votre calculatrice ou un tableur mais pour $f\left(-100+10^{-12}\right)$ il en va tout autrement. La raison tient au fait que les nombres $\left(-100+10^{-12}\right)^6$ et 10^{12} sont très grands et … très proches ! En revanche, Xcas s'en sort sans problème ! ☺

Ainsi, non seulement la calculatrice rencontre des problèmes de précision mais une représentation graphique précise nécessiterait des unités graphiques extrêmement différentes …

Exercice 4 – Trompeuses apparences (Episode II)

Soit (u_n) la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{n}{6}\left(n^2 - 3n + 8\right) \end{cases}$$

1. En utilisant la définition de la suite (u_n) on obtient facilement :

- $u_2 = u_1 + \frac{1}{6}\times\left(1^2 - 3\times 1 + 8\right) = 1 + \frac{1}{6}\times(1-3+8) = 1 + \frac{1}{6}\times 6 = 1+1 = \boxed{2}$

- $u_3 = u_2 + \frac{2}{6}\times\left(2^2 - 3\times 2 + 8\right) = 2 + \frac{2}{6}\times\left(4 - 6 + 8\right) = 2 + \frac{1}{3}\times 6 = 2 + 2 = \boxed{4}$
- $u_4 = u_3 + \frac{3}{6}\times\left(3^2 - 3\times 3 + 8\right) = 4 + \frac{1}{2}\times\left(9 - 9 + 8\right) = 4 + \frac{1}{2}\times 8 = 4 + 4 = \boxed{8}$
- $u_5 = u_4 + \frac{4}{6}\times\left(4^2 - 3\times 4 + 8\right) = 8 + \frac{2}{3}\times\left(16 - 12 + 8\right) = 8 + \frac{2}{3}\times 12 = 8 + 8 = \boxed{16}$

D'après ces premier calculs, il semble que la suite $\left(u_n\right)$ soit géométrique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $q = 2$.

2. On a maintenant :

$$u_6 = u_5 + \frac{5}{6}\times\left(5^2 - 3\times 5 + 8\right) = 16 + \frac{5}{6}\times\left(25 - 15 + 8\right) = 16 + \frac{5}{6}\times 18 = 16 + 15 = \boxed{31}$$

Ainsi : $u_6 = 31 \neq 32 = 2u_5$ et la suite $\left(u_n\right)$ n'est donc pas géométrique. La conjecture précédente est erronée.

Exercice 5 – Le volume de la sphère

1. Soit k un entier naturel compris entre 0 et $n-1$.
On considère donc les plans orthogonaux à la droite $\left(\mathrm{OA}\right)$ et passant par les points R_k et R_{k+1}.
Le rayon du cylindre intérieur vaut : $\mathrm{R}_{k+1}\mathrm{M}_{k+1}$.
En travaillant dans le triangle $\mathrm{OR}_{k+1}\mathrm{M}_{k+1}$ rectangle en R_{k+1}, on a immédiatement (théorème de Pythagore) : $\mathrm{OM}_{k+1}{}^2 = \mathrm{OR}_{k+1}{}^2 + \mathrm{R}_{k+1}\mathrm{M}_{k+1}{}^2$, soit :

$$\mathrm{R}_{k+1}\mathrm{M}_{k+1}{}^2 = \mathrm{OM}_{k+1}{}^2 - \mathrm{OR}_{k+1}{}^2 = R^2 - \left(\left(k+1\right)\frac{R}{n}\right)^2 = \frac{R^2}{n^2}\left(n^2 - \left(k+1\right)^2\right)$$

Le volume de ce cylindre vaut donc : $\pi \mathrm{R}_{k+1}\mathrm{M}_{k+1}{}^2 \times \frac{R}{n} = \frac{1}{n^3}\left(n^2 - \left(k+1\right)^2\right)\pi R^3$.
Finalement :

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{n^3}\left(n^2 - \left(k+1\right)^2\right)\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^2 - \left(k+1\right)^2\right) = \frac{\pi R^3}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\left(n^2 - k^2\right) = \frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \sum_{k=1}^{n}k^2\right)$$

On raisonne de façon similaire avec le cylindre extérieur de rayon $\mathrm{R}_k\mathrm{M}_k$.

On a cette fois : $\mathrm{R}_k\mathrm{M}_k{}^2 = \mathrm{OM}_k{}^2 - \mathrm{OR}_k{}^2 = R^2 - \left(k\frac{R}{n}\right)^2 = \frac{R^2}{n^2}\left(n^2 - k^2\right)$.

Le volume du cylindre extérieur vaut donc : $\pi \mathrm{R}_k\mathrm{M}_k{}^2 \times \dfrac{R}{n} = \dfrac{1}{n^3}\left(n^2-k^2\right)\pi R^3$.

Finalement :

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n^3}\left(n^2-k^2\right)\pi R^3 = \frac{\pi R^3}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}\left(n^2-k^2\right) = \frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)$$

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, on a donc :

$$u_n \leq \mathscr{V} \leq v_n$$

Soit :

$$\frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right) \leq \mathscr{V} \leq \frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right)$$

2. En utilisant $\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, il vient :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \sum_{k=1}^{n} k^2\right) = \frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) \\ &= \frac{\pi R^3}{n^2}\left(n^2 - \frac{(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{\pi R^3}{6n^2}\left(6n^2 - (n+1)(2n+1)\right) \\ &= \frac{\pi R^3}{6n^2}\left(6n^2 - \left(2n^2+3n+1\right)\right) = \frac{\pi R^3}{6n^2}\left(6n^2 - 2n^2 - 3n - 1\right) \\ &= \frac{4n^2-3n-1}{6n^2} \times \pi R^3 \end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \sum_{k=1}^{n-1} k^2\right) = \frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \frac{(n-1)(n-1+1)\left(2\times(n-1)+1\right)}{6}\right) \\ &= \frac{\pi R^3}{n^3}\left(n^3 - \frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right) = \frac{\pi R^3}{n^2}\left(n^2 - \frac{(n-1)(2n-1)}{6}\right) \\ &= \frac{\pi R^3}{6n^2}\left(6n^2 - (n-1)(2n-1)\right) = \frac{\pi R^3}{6n^2}\left(6n^2 - \left(2n^2-3n+1\right)\right) \\ &= \frac{\pi R^3}{6n^2}\left(6n^2 - 2n^2 + 3n - 1\right) \\ &= \frac{4n^2+3n-1}{6n^2} \times \pi R^3 \end{aligned}$$

Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 2, on a :

$$\frac{4n^2-3n-1}{6n^2} \times \pi R^3 \leq \mathscr{V} \leq \frac{4n^2+3n-1}{6n^2} \times \pi R^3$$

3. Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\frac{4n^2-3n-1}{6n^2}=\frac{4\cancel{n^2}\left(1-\frac{3n}{4n^2}-\frac{1}{4n^2}\right)}{6\cancel{n^2}}=\frac{2}{3}\left(1-\frac{3}{4n}-\frac{1}{4n^2}\right)$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-3}{4n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{-1}{4n^2}\right)=0$, il vient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{3}{4n}-\frac{1}{4n^2}\right)=1$

et, finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{4n^2-3n-1}{6n^2}=\frac{2}{3}$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\frac{2}{3}\pi R^3$.

De façon similaire, on montre que l'on a aussi : $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\frac{2}{3}\pi R^3$.

On en déduit finalement (théorème des gendarmes) que le volume de la demi-sphère de rayon R vaut $\mathscr{V}=\frac{2}{3}\pi R^3$.
On retrouve ainsi le résultat classique :

Le volume de la sphère de rayon R est égal à $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Exercice 6 – Moyenne géométrique

Soit (u_n) une suite géométrique à termes strictement positifs.

1. Notons q la raison de la suite considérée. Pour tout entier naturel n non nul, on a : $\frac{u_n}{u_{n-1}}=\frac{u_{n+1}}{u_n}=q$ et donc (produit en croix) : $u_n^2=u_{n-1}\times u_{n+1}$. Comme les termes de (u_n) sont strictement positifs, il vient immédiatement : $u_n=\sqrt{u_{n-1}\times u_{n+1}}$.

   Le résultat est ainsi établi.

2. D'après l'énoncé, on a la réciproque du résultat établi à la première question.
   Les trois nombres proposés vérifient :

$$\sqrt{24\,157\,817\times 63\,245\,986}=39\,088\,169$$

   Ainsi, les trois nombres proposés peuvent être trois termes consécutifs d'une suite géométrique. Plus précisément, il existe une infinité de suites géométrique dont les trois nombres proposés sont trois termes consécutifs, ce sont les suites géométriques ayant pour raison : $\frac{39\,088\,169}{24\,157\,817}=\frac{63\,245\,986}{39\,088\,169}$.

Les plus curieux(ses) auront peut-être noté que cette raison est très proche du nombre d'or (elle ne peut être égal à ce nombre puisqu'il est irrationnel…).

Exercice 7 – L'un dans l'autre

On considère la suite réelle (u_n) dont les premiers termes sont :

$$u_0 = \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3^2}, \frac{1}{3}, \frac{2^2}{3^3}, \frac{2}{3^2}, \frac{2^3}{3^4}, \frac{2^2}{3^3}, \ldots$$

1. Par construction, on constate que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont géométriques de même raison $q = \frac{2}{3}$. En revanche, le premier terme de (u_{2n}) est $u_0 = \frac{1}{3}$ tandis que le premier terme de (u_{2n+1}) est $u_1 = \frac{1}{2}$.
   On a donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ et } u_{2n+1} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

2. Pour tout entier naturel n, il vient alors, classiquement :

$$u_0 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{3}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, u_0 + u_2 + u_4 + \ldots + u_{2n} = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ et } u_1 + u_3 + u_5 + \ldots + u_{2n+1} = \frac{3}{2}\times\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right]}$$

3. Comme suggéré dans l'énoncé, nous allons distinguer deux cas selon la parité de *n*.

$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair : } n = 2p}$

On a alors :

$$\begin{aligned} S_n &= S_{2p} \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{2p-1} + u_{2p} \\ &= \left(u_0 + u_2 + \ldots + u_{2p}\right) + \left(u_1 + u_3 + \ldots + u_{2p-1}\right) \\ &= \left(u_0 + u_2 + \ldots + u_{2p}\right) + \left(u_1 + u_3 + \ldots + u_{2(p-1)+1}\right) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats précédents, il vient :

$$\begin{aligned} S_n &= \left(u_0 + u_2 + \ldots + u_{2p}\right) + \left(u_1 + u_3 + \ldots + u_{2(p-1)+1}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} + \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p-1+1}\right] \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} + \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p}\right] \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} + \frac{3}{2} - \frac{9}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \\ &= 1 + \frac{3}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} - \frac{9}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair : } n = 2p+1}$

On a alors :

$$\begin{aligned} S_n &= S_{2p+1} \\ &= u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{2p} + u_{2p+1} \\ &= \left(u_0 + u_2 + \dots + u_{2p}\right) + \left(u_1 + u_3 + \dots + u_{2p+1}\right) \end{aligned}$$

En utilisant les résultats précédents, il vient :

$$\begin{aligned} S_n &= \left(u_0 + u_2 + \dots + u_{2p}\right) + \left(u_1 + u_3 + \dots + u_{2p+1}\right) \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} + \frac{3}{2} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}\right] \\ &= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \\ &= 1 + \frac{3}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} - \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \\ &= \frac{5}{2} - \frac{5}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \\ &= \frac{5}{2} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}\right] \end{aligned}$$

En définitive :

Pour tout entier naturel p :

$$S_{2p} = \frac{5}{2} - \frac{13}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1} \quad \text{et} \quad S_{2p+1} = \frac{5}{2} \times \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{p+1}\right]$$