Lycée Fénelon Sainte-Marie

Préparation Science-Po / Stage de pré-rentrée

Galop d'essai

SUJET

Ce galop d'essai est un VRAI/FAUX comportant un total de 40 affirmations (Attention ! Plusieurs affirmations peuvent être proposées dans une même question.).
Pour chacune d'elles, vous devez préciser, <u>en justifiant soigneusement</u>, si vous l'estimez vraie ou fausse.

Probabilités (12 affirmations)

1. Soit A et B deux événements relatifs à une même expérience aléatoire.
   On suppose que l'on a : $p(\mathrm{A}) = 0{,}15$; $p(\mathrm{B}) = 0{,}35$; $p(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = 0{,}1$.
   Alors : $p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = 0{,}6$.

2. Dans une loterie, un billet sur trois est gagnant.
   On est certain de gagner en achetant trois billets.

3. Soit X une variable aléatoire prenant des valeurs réelles.
   On note $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$ respectivement la variance et l'écart type de X.
   On a toujours $\sigma(\mathrm{X}) \leq \mathrm{V}(\mathrm{X})$.

4. Soit X une variable aléatoire réelle prenant les valeurs 1, 2, 3, 4 ou 5.
   On a toujours :
   a. $p(\mathrm{X} \leq 4) \geq p(\mathrm{X} = 5)$.
   b. $p(\mathrm{X} = 5) = 1 - p(\mathrm{X} \leq 4)$

5. On lance un dé cubique pipé.
   On note X la valeur de la face supérieure.
   On note $\mathrm{E}(\mathrm{X})$ et $\sigma(\mathrm{X})$ respectivement l'espérance et l'écart type de X.
   On sait que les probabilités d'obtention de 1, 2, 3, 4 et 5 sont égales et que $p(\mathrm{X} = 6) = \dfrac{1}{4}$.
   On a :
   a. $p(\mathrm{X} = 1) = \dfrac{1}{5}$.
   b. $\mathrm{E}(\mathrm{X}) = 3{,}75$.
   c. $\sigma(\mathrm{X}) = 5$.

6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli.
   Si $\mathrm{V}(\mathrm{X})=\dfrac{10}{49}$ alors $p(\mathrm{X}=0)=\dfrac{2}{7}$ ou $p(\mathrm{X}=0)=\dfrac{5}{7}$.

7. Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale.
   Si $\mathrm{E}(\mathrm{X})=2$ et $\mathrm{V}(\mathrm{X})=1$ alors $p(\mathrm{X}=0)=\dfrac{1}{16}$.

8. Pour tout x réel $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(x-1)^{n-k}=1$.

9. Une urne contient une boule blanches et deux boules noires, indiscernables au toucher.
   On effectue 10 tirages successifs avec remise.
   La probabilité de tirer exactement 3 boules blanches est égale à $\dfrac{5\times 2^{10}}{3^9}$.

Fonctions (14 affirmations)

10. Le plus grand de deux réels *a* et *b*, noté $\max(a\,;b)$, est égal à $\dfrac{a+b+|a-b|}{2}$.

11. Pour tout *n* entier naturel, on considère l'équation : $(-1)^n x^2+5x+(-1)^{n+1}=0$.
    a. L'équation admet toujours deux racines distinctes.
    b. Si l'équation admet deux racines distinctes, leur somme est toujours strictement positive.
    c. Si l'équation admet deux racines distinctes, elles sont inverses l'une de l'autre.

12. La fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*$.

13. Le produit de deux fonctions strictement décroissantes sur un intervalle I est une fonction strictement décroissante sur I.

14. Sur la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y=x^2$, il existe deux points distincts en lesquels les tangentes sont strictement parallèles.

15. La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}$.

16. La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

17. Aucune des tangentes à la courbe représentative de la fonction inverse ne passe par l'origine du repère.

18. Au point d'abscisse a de la courbe d'équation $y = x^3$, l'équation réduite de la tangente est $y = 3a^2x - 2a^3$.

19. Si une fonction f est dérivable et strictement décroissante sur un intervalle I alors on a : pour tout x dans I, $f'(x) < 0$.

20. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^3 + ax^2 + bx + c$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si $b \geq \dfrac{a^2}{3}$.

21. Si f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f'(a) = 0$ alors f admet un extremum local en a.

Suites (14 affirmations)

22. J'ai N objets. Je les numérote : 13, 14, 15, …
Le dernier objet porte alors le numéro 123.
J'ai donc $\mathrm{N} = 110$ objets.

23. La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7 \times 3^{-n}$ est géométrique de raison 3.

24. La suite (u_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 7^n + 7^{n+2}$ est géométrique.

25. La somme de deux suites arithmétiques est une suite arithmétique.

26. Le produit de deux suites géométriques est une suite géométrique.

27. Pour toute suite (u_n), on a : $u_n = \sum_{p=0}^{n+1} u_p - \sum_{p=0}^{n} u_p$

28. Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $r = -2$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=10}^{20} u_p = 11u_{10} - 110$.

29. $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=2}^{n} \dfrac{p-1}{2} = \dfrac{n(n-1)}{4}$

30. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q = 5$.
Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{p=10}^{20} u_p = \dfrac{1}{4} u_{10} \left(5^{10} - 1\right)$.

31. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

    On a :

    a. $u_1 = 2$.

    b. $u_2 = 9$.

    c. Il existe un entier N tel que $u_N = N^2 + 1$.

    d. La suite (u_n) est strictement croissante.

    e. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+1)^2$

FIN DU SUJET