Médiatrice et triangle rectangle

Travail à l'aide du logiciel GEOPLAN

Collège Fénelon Sainte-Marie
4ème – Année scolaire 2007-2008

I/ MEDIATRICES D'UN TRIANGLE

Définition (rappel)

La médiatrice d'un segment est la droite coupant perpendiculairement ce segment en son milieu.

Propriété fondamentale

Les médiatrices des côtés d'un triangle sont concourantes et le point d'intersection est le centre du cercle circonscrit à ce triangle.

Avec GEOPLAN

- Crée trois points libres (tu pourras ainsi les déplacer à ta guise à l'aide de la souris) dans le plan : A, B et C ;
- Crée les trois segments [AB], [AC] et [BC] ;
- Crée les points I, J et K milieux respectifs des segments [BC], [AC] et [AB] ;
- Crée les médiatrices (d1), (d2) et (d3) des segments [BC], [AC] et [AB] respectivement ;
- Vérifie que les droites (d1), (d2) et (d3) sont concourantes en un point (le centre du cercle circonscrit !) que l'on nommera O ;
- Construis le cercle circonscrit au triangle ABC. Déplace l'un des sommets du triangle. Dans quel cas le centre du cercle circonscrit semble-t-il être à l'extérieur du triangle ?

II/ CENTRE DU CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE RECTANGLE

Propriété

Dans un triangle rectangle, le milieu de l'hypoténuse est le centre du cercle circonscrit.

Avec GEOPLAN

- Crée trois points libres dans le plan : A, B et C ;
- Construis la perpendiculaire (d) à la droite (AC) passant par le point B ;
- Construis le point M, intersection des droites (AC) et (d) ;
- Construis le point I, milieu du segment [AB] ;
- Construis le segment [IM] ;

A l'aide de la souris déplace successivement les points A, B et C. Que peux-tu dire des longueurs IA, IB et IM ?

Pour nous convaincre, nous allons demander à GEOPLAN de nous fournir ces longueurs.

Pour cela, on va procéder comme suit :

- On va créer trois variables numériques correspondant aux trois longueurs des segments [IA], [IB] et [IM] :

  Menu « Créer » → « Numérique » → « Calcul géométrique » → « Longueur d'un segment » (tu peux, par exemple, appeler ces trois longueurs L1, L2 et L3).

  Comme tu peux le constater, GEOPLAN n'affiche pas les longueurs … il faut le lui demander !

- Crée un affichage : « Créer » → « Affichage » → « Variable numérique prédéfinie ». Tu dois répéter cette opération 3 fois et, à chaque fois, indiquer le nom de la variable numérique à afficher …

Déplace à nouveau les sommets A, B et C. Les valeurs affichées sont-elles toujours égales ? L'affichage des trois longueurs suffit-il ? Comment pourrait-on faire pour s'en assurer ?

<u>Remarque :</u> GEOPLAN permet d'afficher directement la longueur d'un segment sans création préalable d'une variable numérique. Le désavantage de cette approche dans notre situation est que nous ne pouvons alors pas effectuer de calcul sur cette longueur tandis qu'avec des variables numériques si !

<u>III/ UN POINT SUIVI … A LA TRACE !</u>

Propriété

Si un triangle est inscrit dans un cercle en ayant comme côté un diamètre de ce cercle alors il est rectangle et le diamètre considéré est son hypoténuse.

Avec GEOPLAN

- Crée trois <u>points libres</u> dans le plan : A, B et O (le cas échéant, déplace A ou B de sorte que ces deux points ne soient pas trop éloignés l'un de l'autre) ;
- Construis le segment [AB] ;
- Construis la perpendiculaire (d) à la droite (AO) passant par le point B ;
- Construis le point M, intersection des droites (AO) et (d) ;
- A l'aide de la souris, déplace le point O de façon à faire « tourner » la droite (AO) autour du point A. Comment semble se déplacer le point M ?

Nous allons essayer d'y voir un peu plus clair ! Pour cela, le mode « trace » offert par GEOPLAN va nous être particulièrement utile !

- Choisis le menu « Afficher » → « Sélection trace » puis choisis, dans la petite fenêtre qui apparaît alors, le point M ;
- Bascule en mode trace en choisissant « Afficher » → « Mode trace (bascule) » ou en cliquant sur l'icône du mode trace ;
- A partir de là, recommence la manipulation effectuée ci-dessus (déplace le point O avec la souris).

Tu vois alors apparaître la trace des positions (pas toutes en réalité ! Seulement certaines !) occupées par le point M : cette trace sera d'autant plus fine que le point M se déplacera lentement. La figure qui apparaît, et que tu n'as probablement pas de mal à identifier, est appelée, en mathématiques, un « lieu » (le lieu des positions du point M).

Saurais-tu prouver que ce lieu correspond bien à la figure observée ?

IV/ UNE BIEN PETITE LONGUEUR …

Définition

La distance d'un point à une droite est la distance séparant le point considéré du pied de la perpendiculaire à la droite passant par ce point.

Avec GEOPLAN

- Crée trois points libres dans le plan : A, B et M ;
- Crée la droite (AB) ;
- A l'aide de certaines des manipulations effectuées précédemment, trouve deux façons pour afficher la distance du point M à la droite (AB).

V/ UN TRIANGLE D'AIRE MAXIMALE.

Avec GEOPLAN

- Crée un cercle C de centre I ;
- Crée un point libre A sur le cercle C ;
- Construis deux points de C diamétralement opposés :
    - Crée un deuxième point libre M sur le cercle C ;
    - Crée le symétrique N de M par rapport à I ;
    - Crée le segment [MN].
- Crée les segments [AM] et [AN] ;
- Affiche l'aire du triangle AMN à l'aide du menu « Créer » → « Affichage » → « Aire d'un triangle » ;
- Déplace le point M de sorte que l'aire du triangle AMN soit la plus grande possible.
  Que peux-tu dire du triangle AMN ?
  Vérifie-le plus précisément en affichant la mesure de l'angle AIM à l'aide du menu « Créer » → « Affichage » → « Mesure d'un angle géométrique » (attention de choisir « degré » pour l'unité …).

Remarque : tu peux également déplacer le point M du cercle C à l'aide du clavier (flèches) grâce au menu « Piloter » → « Piloter au clavier ».

Démontre le résultat obtenu.

Reprendre ce travail avec, cette fois, un point A quelconque dans le plan (pour cela, ne pas hésiter à utiliser le menu « Créer » → « Point » → « Point libre » → « Dans le plan » et à choisir à nouveau A comme nom pour le point …).

VI/ POUR LES PLUS RAPIDES.

On s'intéresse ici à l'existence éventuelle d'un cercle circonscrit à un parallélogramme.

Dans un premier temps, nous allons travailler à l'écran, ce travail devant nous conduire à une conjecture :

- Construit trois points A, B et C libres dans le plan ;
- Construis les droites (AB) et (BC) ;
- Construis la parallèle à (BC) passant par A. Appelle cette droite (d1) ;
- Construis la parallèle à (AB) passant par C. Appelle cette droite (d2) ;
- Construis le point D, intersection des droites (d1) et (d2) ;

ABCD est ainsi un parallélogramme que tu peux modifier à ta guise en déplaçant les points A, B ou C.

- Construis le cercle C1 circonscrit au triangle ABC ;
- Construis le cercle C2 circonscrit au triangle BCD ;
- A l'aide de la souris, déplace l'un des points A, B ou C et essaie de superposer les deux cercles C1 et C2.

Qu'observes-tu alors ?

Pour pouvoir démontrer ce résultat, nous te proposons de remplir les zones manquantes de la démonstration ci-dessous :

Nous nous donnons un parallélogramme ABCD et supposons qu'il admet un cercle circonscrit noté CC dont nous notons I le centre.

CC est le cercle circonscrit au parallélogramme ABCD, il est donc, par définition, le cercle circonscrit des triangles ABC et BCD.

CC étant le cercle circonscrit du triangle ABC, le point I appartient à la _______________ du segment [AC].

CC _____________________________ BCD, le point I appartient à la _______________ du segment [BD].

D'après ce qui précède, I est le point _______________ des médiatrices des segments [AC] et [BD].

Par définition, la médiatrice du segment [AC] passe par _______________ de [AC].
De façon analogue, la ______________________ [BD] _________________________ [BD].

ABCD étant un parallélogramme, ses diagonales, _______ et ______ se coupent en leur milieu.

Les médiatrices des segments [AC] et [BD] passent par leur milieu commun.
On en déduit que **le point I est le milieu commun aux segment [AC] et [BD]**, c'est à dire le point d'intersection des diagonales du parallélogramme ABCD.

I étant le centre du cercle circonscrit au parallélogramme ABCD, on a : IA = IB = IC = ID.
I étant le milieu des segments [AC] et [BD], on a : AC = BD .
En d'autres termes, les diagonales du parallélogramme ABCD sont de même longueur.

ABCD est un parallélogramme dont les ______________ sont de même ___________.
Un parallélogramme dont les diagonales sont de même longueur est un _____________.
On en déduit que ABCD ____________________.