Synthèse de cours (CPGE)

→ Applications

Dans cette synthèse de cours, on suppose connues les généralités sur les ensembles.

Généralités

Notion d'application

Soit E et F deux ensembles.

Définir une application φ de E dans F, c'est se donner une partie $\mathscr{G}$ de $\mathrm{E}\times\mathrm{F}$ telle que pour tout élément *x* de E, il existe un unique élément *y* de F tel que $(x, y)\in\mathscr{G}$.

Les ensembles E, F et $\mathscr{G}$ sont respectivement appelés « ensemble de départ », « ensemble d'arrivée » et « graphe » de l'application φ .

L'élément *y* est appelé « image de *x* par l'application φ » et noté $\varphi(x)$.
L'élément *x* de E est un « antécédent » de l'élément *y*.

On écrit :

$$\varphi:\begin{cases}\mathrm{E}\to\mathrm{F}\\ x\mapsto\varphi(x)\end{cases}\quad\text{ou}\quad\begin{cases}\mathrm{E}\xrightarrow{\varphi}\mathrm{F}\\ x\mapsto\varphi(x)\end{cases}$$

L'ensemble des applications de E dans F est noté : F^{E} .

Remarques :

❶ Un élément de F peut admettre 0, 1 ou plusieurs antécédents.

❷ La donnée des ensembles de départ et d'arrivée fait partie intégrante de la définition d'une application. Par exemple, la fonction racine carrée n'a pas les mêmes propriétés de dérivabilité selon qu'on la considère comme une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ ou comme une application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$.

❸ La courbe représentative d'une fonction, prise comme une application dès lors que l'on considère son domaine de définition comme ensemble de départ, est en fait la courbe représentative de son graphe.

Exemples fondamentaux

Application « identité » :

$$\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} : \begin{cases} \mathrm{E} \to \mathrm{E} \\ x \mapsto x \end{cases}$$

« Injection canonique » de E dans F :

$$j_{\mathrm{E}} : \begin{cases} \mathrm{E} \to \mathrm{F} \\ x \mapsto x \end{cases}$$

« Projections » :

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ p_i : \begin{cases} \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2 \times \ldots \times \mathrm{E}_n \to \mathrm{E}_i \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_i \end{cases}$$

Restriction et prolongement

Soit E et F deux ensembles et soit φ une application de E dans F.
Soit A une partie de E.

On appelle « restriction de φ à A » l'application notée $\varphi|_{\mathrm{A}}$ et définie par :

$$\varphi|_{\mathrm{A}} : \begin{cases} \mathrm{A} \to \mathrm{F} \\ x \mapsto \varphi(x) \end{cases}$$

On dira que φ^* est « une restriction de φ » s'il existe une partie A de E telle que φ^* soit la restriction de φ à A.

On dira que $\tilde{\varphi}$ est un « prolongement de φ » si φ est une restriction de $\tilde{\varphi}$.

Image directe et image réciproque

Soit E et F deux ensembles et soit φ une application de E dans F.
Soit A une partie de E et B une partie de F.

On appelle « image directe de A par φ » ou « image de A par φ » le sous-ensemble de F, noté $\varphi(\mathrm{A})$, défini par : $\{\varphi(x) / x \in \mathrm{A}\}$.

Il s'agit donc de l'<u>ensemble des images des éléments de A</u>.

On appelle « image réciproque de B par φ » le sous-ensemble de E, noté $\varphi^{-1}(\mathrm{B})$, défini par : $\{x \in \mathrm{E} / \varphi(x) \in \mathrm{B}\}$.

Il s'agit donc de l'ensemble des antécédents des éléments de B.

Application composée

Définition

Soit E, F et G trois ensembles.
Soit φ une application de E dans F et ψ une application de F dans G.

On appelle « composée de φ et ψ » l'application notée $\psi \circ \varphi$ et définie par :

$$\psi \circ \varphi : \begin{cases} \mathrm{E} \rightarrow \mathrm{G} \\ x \mapsto (\psi \circ \varphi)(x) = \psi(\varphi(x)) \end{cases}$$

Propriétés

Propriété 1
Soit E et F deux ensembles et soit φ une application de E dans F.

On a :

$$\varphi \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{E}} = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}} \circ \varphi = \varphi$$

Propriété 2
Soit E, F, G et H quatre ensembles.
Soit φ une application de E dans F, ψ une application de F dans G et ξ une application de G dans H.
On a :

$$\xi \circ (\psi \circ \varphi) = (\xi \circ \psi) \circ \varphi$$

Injectivité, surjectivité et bijectivité

Définitions

Soit E et F deux ensembles et φ une application de E dans F.

On dit que « φ est injective » ou que « φ est une injection de E dans F » si tout élément de F admet au plus un antécédent par φ. Soit :

$$\varphi \text{ injective} \Leftrightarrow \forall (x,x') \in \mathrm{E}^2, \varphi(x)=\varphi(x') \Rightarrow x=x'$$

On dit que « φ est surjective » ou que « φ est une surjection de E dans F » si tout élément de F admet au moins un antécédent par φ. Soit :

$$\varphi \text{ surjective} \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{F}, \exists x \in \mathrm{E} \,/\, y=\varphi(x)$$

On dit que « φ est bijective » ou que « φ est une bijection de E dans F » si elle est injective et surjective c'est-à-dire si tout élément de F admet exactement un antécédent par φ. Soit :

$$\varphi \text{ bijective} \Leftrightarrow \forall y \in \mathrm{F}, \exists! x \in \mathrm{E} \,/\, y=\varphi(x)$$

Propriétés

Propriété 1
La composée de deux injections (respectivement surjections/bijections) est une injection (respectivement surjection/bijection).

Propriété 2
Soit E, F et G trois ensembles.
Soit φ une application de E dans F et ψ une application de F dans G.
On a :

$$\psi \circ \varphi \text{ injective} \Rightarrow \varphi \text{ injective}$$
$$\psi \circ \varphi \text{ surjective} \Rightarrow \psi \text{ surjective}$$

Il en découle :

$$\psi \circ \varphi \text{ bijective} \Rightarrow \varphi \text{ injective et } \psi \text{ surjective}$$

Caractérisation des bijections

Soit E et F deux ensembles et φ une application de E dans F.

L'application φ est bijective si, et seulement si, il existe une application φ' de F dans E telle que :

$$\varphi' \circ \varphi = \mathrm{Id}_E \text{ et } \varphi \circ \varphi' = \mathrm{Id}_F$$

Dans ce cas, l'application φ' est unique, on la note φ^{-1} et on l'appelle « bijection réciproque de l'application φ ».
On a donc immédiatement : $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{Id}_E$ et $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{Id}_F$.

Si φ est une application bijective d'un ensemble E dans lui-même et si on a $\varphi^{-1} = \varphi$, on dit que « φ est involutive » ou que « φ est une involution ».

Exemple d'involution : une symétrie (centrale ou axiale) du plan.

Propriétés de la bijection réciproque

Soit E, F et G trois ensembles.
Soit φ une bijection de E dans F et ψ une bijection de F dans G.

On a :

$$\left(\varphi^{-1}\right)^{-1} = \varphi$$
$$\left(\psi \circ \varphi\right)^{-1} = \varphi^{-1} \circ \psi^{-1}$$