# Synthèse de cours (CPGE)
# → Applications linéaires

## Applications linéaires

### *Définition*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi$ une application de E dans F.

On dit que $\varphi$ est une « application linéaire » si on a :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F},\ \forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{K}^2,\ f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

En d'autres termes, l'application $\varphi$ est, dans ce cas, un morphisme de E dans F pour chacune des lois de E et F.

L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté : $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ou, lorsque E et F sont confondus : $\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

### *Vocabulaire*

Soit $\varphi$ une application linéaire de E dans F.

Si $\mathrm{F} = \mathrm{E}$, on dit que $\varphi$ est un « endomorphisme de E ».

Si $\mathrm{F} = \mathbb{K}$, on dit que $\varphi$ est une « forme linéaire sur E ». L'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est noté E* et est appelé « espace dual » de l'espace vectoriel E.

Si $\varphi$ est bijective, on dit que $\varphi$ est un « isomorphisme de E dans F ». Un endomorphisme bijectif est appelé « automorphisme ». L'ensemble des automorphismes de E est appelé « groupe linéaire de E » et est noté : $\mathscr{GL}(\mathrm{E})$.

### *Théorème*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Si $\varphi$ est un isomorphisme de E dans F (respectivement automorphisme de E) alors l'application réciproque $\varphi^{-1}$ est un isomorphisme de F dans E (respectivement automorphisme de E).

### *Théorème*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

L'ensemble $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathrm{F}^{\mathrm{E}}$ des applications de E dans F.

On retiendra que toute combinaison linéaire (y compris la combinaison linéaire nulle) d'applications linéaires est une application linéaire.

### *Théorème*

Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

L'application $\Phi$ définie par :

$$\Phi:\begin{cases}\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})\times\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})\to\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})\\ \quad (f,g)\mapsto\Phi(f,g)=g\mathrm{o}f\end{cases}$$

est bilinéaire ; c'est-à-dire :

$$\forall(f_1,f_2)\in\left(\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})\right)^2,\ \forall g\in\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G}),\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ g\mathrm{o}(\alpha f_1+\beta f_2)=\alpha g\mathrm{o}f_1+\beta g\mathrm{o}f_2$$

et :

$$\forall(g_1,g_2)\in\left(\mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})\right)^2,\ \forall f\in\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}),\ \forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2,\ (\alpha g_1+\beta g_2)\mathrm{o}f=\alpha g_1\mathrm{o}f+\beta g_2\mathrm{o}f$$

# Noyau et image d'une application linéaire

## *Définitions*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi$ une application linéaire de E dans F.

On appelle « noyau de l'application linéaire $\varphi$ », noté « $\ker\varphi$ », l'ensemble des vecteurs de E dont l'image par $\varphi$ est le vecteur nul de F (c'est-à-dire l'ensemble des antécédents du vecteur nul de F) :

$$\ker\varphi = \left\{x \in \mathrm{E} \,/\, \varphi(x) = 0_{\mathrm{F}}\right\} = \varphi^{-1}\left(\left\{0_{\mathrm{F}}\right\}\right)$$

On appelle « image de l'application linéaire $\varphi$ », noté $\operatorname{Im}\varphi$, l'ensemble des vecteurs de F images par $\varphi$ de vecteurs de E :

$$\operatorname{Im}\varphi = \left\{y \in \mathrm{F} \,/\, \exists x \in \mathrm{E},\ y = \varphi(x)\right\} = \varphi(\mathrm{E})$$

Remarque : $\varphi^{-1}\left(\left\{0_{\mathrm{F}}\right\}\right)$ désigne l'image réciproque du singleton $\left\{0_{\mathrm{F}}\right\}$, c'est-à-dire l'ensemble des antécédents par $\varphi$ du vecteur nul de F.

## *Théorème*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi$ une application linéaire de E dans F.

Le noyau de $\varphi$ est un sous-espace vectoriel de E et l'image de $\varphi$ est un sous-espace vectoriel de F.

## *Théorème*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $\varphi$ une application linéaire de E dans F.

$$\varphi \text{ est injective } \Leftrightarrow \ker\varphi = \left\{0_{\mathrm{E}}\right\}$$
$$\varphi \text{ est bijective } \Leftrightarrow \operatorname{Im}\varphi = \mathrm{F}$$

# Projecteurs et symétries

## *Définitions*

Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel.
Soit F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Pour tout $x$ de E, il existe un unique couple de vecteurs $(x_F, x_G)$ de $F \times G$ tel que :

$$x = x_F + x_G$$

Le vecteur $x_F$ (respectivement $x_G$) est appelé « projeté de $x$ sur F parallèlement à G » (respectivement sur G parallèlement à F) et l'application : $p_F : x \mapsto p_F(x) = x_F$ (respectivement $p_G : x \mapsto p_G(x) = x_G$) est appelée « projection sur F parallèlement à G » (respectivement « projection sur G parallèlement à F).

$p_F$ et $p_G$ sont des endomorphismes de E appelés « projecteurs de E ».

On a :

$$\ker p_F = G \text{ et } \operatorname{Im} p_F = F$$
$$(\text{respectivement : } \ker p_G = F \text{ et } \operatorname{Im} p_G = G)$$

Le vecteur $x_F - x_G = (p_F - p_G)(x)$ (respectivement $x_G - x_F = (p_G - p_F)(x)$) est appelé « symétrique de $x$ par rapport à F parallèlement à G » (respectivement par rapport à G parallèlement à F) et l'application $s_F : x \mapsto x_F - x_G = (p_F - p_G)(x)$ (respectivement $s_G : x \mapsto x_G - x_F = (p_G - p_F)(x)$) est appelé « symétrie par rapport à F parallèlement à G » (respectivement « symétrie par rapport à G parallèlement à F »).

$s_F$ et $s_G$ sont des endomorphismes de E appelés « symétries de E ».

Remarques :

- $p_F + p_G = \mathrm{id}_E$ ;
- A partir de $s_F = p_F - p_G$ et $p_F + p_G = \mathrm{id}_E$, on obtient :

$$p_F = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s_F) \text{ et } p_G = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E - s_F)$$

  Symétriquement :

$$p_F = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E - s_G) \text{ et } p_G = \frac{1}{2}(\mathrm{id}_E + s_G)$$

### *Théorème*

Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriel.

Soit $\varphi$ un endomorphisme de E.

On a :

$$\varphi \text{ projecteur} \Leftrightarrow \varphi o \varphi = \varphi$$
$$\varphi \text{ symétrie} \Leftrightarrow \varphi o \varphi = \mathrm{id}_E$$

## Applications linéaires en dimension finie

### *Image d'une base*

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, **E de dimension finie *p***.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E.

Soit $\varphi$ une application linéaire de E dans F.

L'application linéaire $\varphi$ est complètement définie par la donnée des images $\varphi(e_1)$, $\varphi(e_2)$, …, $\varphi(e_p)$ des vecteurs de la base $\mathscr{B}$ :

$$\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\left(\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_p)\right)$$

### *Rang d'une application linéaire*

#### Définition

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, **E de dimension finie *p***.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E.

Soit $\varphi$ une application linéaire de E dans F.

La dimension de $\mathrm{Im}\,\varphi = \mathrm{Vect}\left(\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_p)\right)$ est appelé « rang de l'application linéaire $\varphi$ » et on la note : $\mathrm{rg}\varphi$.

## Théorème

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels **de dimensions finies**, $p$ et $n$ respectivement.

Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E.

Soit $\varphi$ une application linéaire de E dans F.

On a :

$$\varphi \text{ injective} \Leftrightarrow (\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_p)) \text{ est libre dans F } \Leftrightarrow \operatorname{rg}\varphi = p$$

$$\varphi \text{ surjective} \Leftrightarrow (\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_p)) \text{ est génératrice de F } \Leftrightarrow \operatorname{rg}\varphi = n$$

$$\varphi \text{ bijective} \Leftrightarrow (\varphi(e_1), \varphi(e_2), ..., \varphi(e_p)) \text{ est une base de F } \Leftrightarrow \operatorname{rg}\varphi = p = n$$

Remarques :

- Pour toute application linéaire $\varphi$ : $\operatorname{rg}\varphi \leq \inf(p, n)$ ;
- $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = np$ .

## Théorème du rang

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, **E de dimension finie**.

Soit $\varphi$ une application linéaire de E dans F.

Dans ces conditions, $\operatorname{Im} f$ est isomorphe à tout supplémentaire de $\ker f$ dans E et on a :

$$\dim \ker f + \operatorname{rg} f = \dim E$$