Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Arcs paramétrés

Préambule

Certains auteurs préfèrent à « arc paramétré » la dénomination de « courbe paramétrée ». Dans ce document, nous utiliserons la première dénomination.

Définitions

Arc paramétré

On appelle « arc paramétré » toute application continue d'un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ dans un espace affine ***E*** de dimension finie :

$$\begin{aligned} \gamma : I &\to \boldsymbol{E} \\ t &\mapsto M(t) \end{aligned}$$

Nous nous limitons ici au cas où ***E*** est de dimension 2. On rapporte ***E*** à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on a alors : $M(t)\left|\begin{matrix} x(t) \\ y(t) \end{matrix}\right.$, et on dit alors que « l'arc paramétré est défini en coordonnées cartésiennes », ou $M(r,\theta)\left|\begin{matrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{matrix}\right.$, et on dit alors que « l'arc paramétré est défini en coordonnées polaires ».

L'ensemble des points *M* obtenus constitue le graphe de γ. En traçant dans le plan la courbe correspondante, on obtient la courbe représentative du graphe de γ. Nous la noterons Γ.

Arcs paramétrés en coordonnées cartésiennes

Domaine de définition

Les variables *x* et *y* étant des fonctions du paramètre *t*, elles sont définies sur D_x et D_y respectivement. L'ensemble de définition de l'arc γ est alors :

$$\boxed{D_\gamma = D_x \cap D_y}$$

Domaine utile

→ Notion de reproduction de la courbe.

On appelle « Domaine utile », noté D_γ^u, le plus petit sous-ensemble de D_γ tel que lorsque *t* varie dans D_γ^u l'arc est parcouru une fois et une seule dans sa totalité.

Domaine d'étude

→ Notion de <u>symétrie de la courbe</u>.

On appelle « domaine d'étude » tout sous-ensemble D_γ^E de D_γ^u tel qu'il existe une bijection φ entre D_γ^E et $D_\gamma^u - D_\gamma^E$.

En notant $\varphi(t) = t'$, on a les cas de figure classiques suivants :

Relations entre $x(t)$, $y(t)$, $x(t')$ et $y(t')$	**Propriété géométrique de la courbe représentative de l'arc γ**
$x(t') = x(t)$ $y(t') = -y(t)$	Symétrie axiale par rapport à l'axe de abscisses
$x(t') = -x(t)$ $y(t') = y(t)$	Symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées
$x(t') + x(t) = 2a$ $y(t') + y(t) = 2b$	Symétrie centrale par rapport au point A de coordonnées (a,b) (cas particulier : $a = b = 0$: le centre de symétrie est l'origine)
$x(t') = y(t)$ $y(t') = x(t)$	Symétrie axiale par rapport à la première bissectrice
$x(t') = -y(t)$ $y(t') = -x(t)$	Symétrie axiale par rapport à la deuxième bissectrice

Si on ne peut exhiber une telle bijection, on étudie l'arc sur D_γ^u : $D_\gamma^u = D_\gamma^E$.

Branches infinies

Soit : $\gamma :]a,b[\to \boldsymbol{E}$ (les bornes a et b pouvant être infinies).

On dit que « γ admet une branche infinie en b » (resp. a) si on a :

$$\lim_{t \to b^-} \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = +\infty \text{ (resp. } \lim_{t \to a^+} \left\| \overrightarrow{OM} \right\| = +\infty \text{)}$$

Note : l'existence d'une branche infinie est indépendante de l'origine choisie.

Les différents cas de figure possibles sont les suivants (nous traitons la problématique des limites en b, les résultats sont bien sûr analogues en a) :

1. $\lim_{t \to b^-} x(t) = x_0$ et $\lim_{t \to b^-} y(t) = \pm\infty$ → Asymptote d'équation $x = x_0$;
2. $\lim_{t \to b^-} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to b^-} y(t) = y_0$ → Asymptote d'équation $y = y_0$;
3. $\lim_{t \to b^-} x(t) = \pm\infty$ et $\lim_{t \to b^-} y(t) = \pm\infty$ → plusieurs cas de figure sont possibles :
   a. $\lim_{t \to b^-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$ → Branche parabolique de direction Ox (axe des abscisses) ;
   b. $\lim_{t \to b^-} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ → Branche parabolique de direction Oy (axe des ordonnées) ;

c. $\lim_{t \to b^-} \frac{y(t)}{x(t)} = \alpha$ → Direction asymptotique d'équation $y = \alpha x$.

On a alors deux cas de figure possible :

- $\lim_{t \to b^-} \left(y(t) - \alpha x(t) \right) = \pm\infty$ → Branche parabolique de direction $y = \alpha x$;
- $\lim_{t \to b^-} \left(y(t) - \alpha x(t) \right) = \beta$ → Asymptote d'équation : $y = \alpha x + \beta$.

Points limites

Soit : $\gamma :]a, b[\to \boldsymbol{E}$ (les bornes *a* et *b* pouvant être infinies).

On dit que « γ admet un point limite en *b* » (resp. *a*) si on a :

$$\lim_{t \to b^-} M(t) = B \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. \quad \text{(resp. } \lim_{t \to a^+} M(t) = B \left| \begin{matrix} x_0 \\ y_0 \end{matrix} \right. \text{)}$$

On exhibe donc un point limite lorsque l'on a : $\lim_{t \to b^-} x(t) = x_0$ et $\lim_{t \to b^-} y(t) = y_0$.

Note : un « point limite » peut aussi être appelé « point asymptote ».

Si un point limite *B* est détecté, on recherche la limite suivante correspondant à la limite de la pente de la droite passant par les points *B* et $M(t)$:

$$\lim_{t \to b^-} \left(\frac{y(t) - y_0}{x(t) - x_0} \right)$$

Note : si cette limite est infinie, la tangente en *B* est verticale.

Tangente et étude locale en un point

Soit γ un arc paramétré de classe C^n avec $n \geq 1$. Soit M_0 le point correspondant au paramètre t_0 : $M_0 = \gamma(t_0)$.

On suppose : $\exists p \leq n / \gamma^{(p)}(t_0) \neq 0$ et $\forall k < p, \gamma^{(k)}(t_0) = 0$. En d'autres termes, $\gamma^{(p)}(t_0)$ est le premier vecteur dérivé non nul en t_0. Alors, $\gamma^{(p)}(t_0)$ est un vecteur directeur de la tangente à Γ en M_0.

Soit donc $\gamma^{(p)}(t_0) \left| \begin{matrix} a_p \\ b_p \end{matrix} \right.$ le premier vecteur dérivé non nul en t_0.

Si $a_p = 0$, la tangente en M_0 est verticale.

Si $a_p \neq 0$, la pente de la tangente en M_0 vaut : $m_0 = \frac{b_p}{a_p}$.

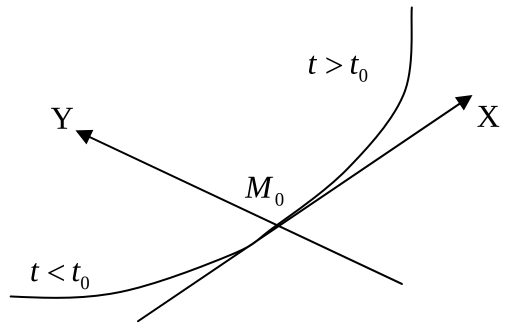
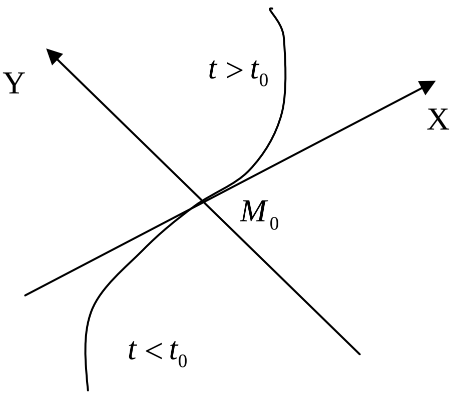
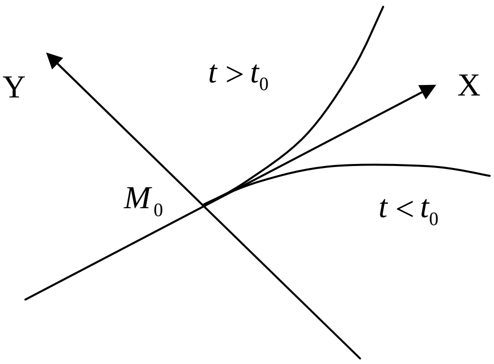
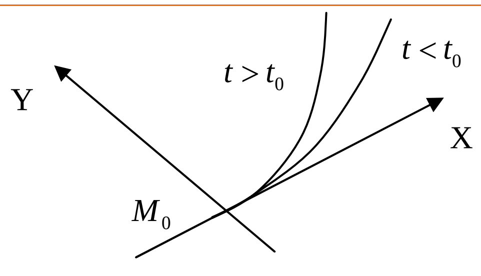
En conservant les mêmes hypothèses que ci-dessus, on suppose, de plus :
$\exists q \leq n / \ \forall k \in \{p+1, p+2, ..., q-1\}$ $\gamma^{(k)}(t_0)$ et $\gamma^{(p)}(t_0)$ sont linéairement dépendants (colinéaires) et $\gamma^{(p)}(t_0)$ et $\gamma^{(q)}(t_0)$ sont linéairement indépendants (non colinéaires).

En d'autres termes, $\gamma^{(q)}(t_0)$ est le premier vecteur dérivé indépendant de $\gamma^{(p)}(t_0)$.

Alors on peut considérer le repère local : $\left(M_0, \gamma^{(p)}(t_0), \gamma^{(q)}(t_0)\right)$.

Si, dans ce repère on a : $M(t)\left|\begin{array}{l} X(t) \\ Y(t) \end{array}\right.$, il vient : $X(t) \underset{t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^p}{p!}$ et $Y(t) \underset{t_0}{\sim} \dfrac{(t-t_0)^q}{q!}$

En fonction de la parité de *p* et *q*, on est donc confronté aux quatre cas de figure suivants :

***p* impair et *q* pair.** → <u>point birégulier</u>.	
***p* impair et *q* impair.** → <u>point d'inflexion</u>.	
***p* pair et q impair** → <u>point de rebroussement de 1ère espèce</u>	
***p* pair et q pair** → <u>point de rebroussement de 2ème espèce</u>	

Points stationnaires

On appelle « point stationnaire » un point $M(t)$ de l'arc γ pour lequel on a : $\gamma'(t)=\vec{0}$.

Points doubles

On appelle « point double » un point de l'arc γ tel que :

$$\exists(t_1,t_2)\in\left(D_\gamma^u\right)^2 / t_1\neq t_2 \text{ et } M(t_1)=M(t_2)$$

Arcs paramétrés en coordonnées polaires

Rappels sur les coordonnées polaires

Soit $\boldsymbol{E}$ un espace euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

On dit que (r,θ) est un couple de coordonnées polaires d'un point $M(x,y)$ si :

$$x=r\cos\theta \text{ et } y=r\sin\theta$$

Si on appelle alors $\vec{u}_\theta$ le vecteur $(\cos\theta)\vec{i}+(\sin\theta)\vec{j}$, on a : $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_\theta$.

Remarques :

1. θ est défini modulo 2π : si (r,θ) est un couple de coordonnées polaires de *M* alors pour tout entier *k*, $(r,\theta+2k\pi)$ est aussi un couple de coordonnées polaires de *M*.
2. $\vec{u}_\theta=(\cos\theta)\vec{i}+(\sin\theta)\vec{j}=-\left(\left(\cos(\theta+\pi)\right)\vec{i}+\left(\sin(\theta+\pi)\right)\vec{j}\right)=-\vec{u}_{\theta+\pi}$.

   D'où : $\overrightarrow{OM}=r\vec{u}_\theta=(-r)\vec{u}_{\theta+\pi}$ et $(-r,\theta+\pi)$ est aussi un couple de coordonnées polaires de *M*.

Etude des arcs définis par une relation du type $r=f(\theta)$

On appelle « arc paramétré d'équation polaire $r=f(\theta)$ » l'application continue d'un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ dans un espace affine $\boldsymbol{E}$ de dimension finie :

$$\gamma : I\to\boldsymbol{E}$$
$$\theta\mapsto M(\theta)$$

où $M(\theta)$ est défini par : $\overrightarrow{OM(\theta)}=f(\theta)\vec{u}_\theta$

On notera Γ la courbe représentative de l'arc γ.

Domaine de définition

C'est l'ensemble D_f pour lequel la fonction *f* est définie.

Domaine utile

→ Notion de reproduction de la courbe.

On appelle « Domaine utile », noté D_γ^u, le plus petit sous-ensemble de D_γ tel que lorsque θ varie dans D_γ^u l'arc est parcouru une fois et une seule dans sa totalité.

Domaine d'étude

Plusieurs propriétés, éventuellement vérifiées par *f*, permettent de réduire le domaine utile à un ensemble plus petit que l'on appellera domaine d'étude :

1. $\boxed{\text{Si } f \text{ est périodique : } \exists T>0 / \forall \theta \in D_\gamma^u, \theta+T \in D_\gamma^u \wedge f(\theta+T)=f(\theta).}$

   → On étudie *f* sur un sous-ensemble de D_γ^u de longueur *T* et on obtient l'ensemble de la courbe Γ par des rotations successives d'angle *T*.

   Cas particulier : *T* est de la forme $\frac{2n\pi}{m}$ $\left((n,m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right)$ alors on obtiendra l'ensemble de la courbe Γ par *m* rotations successives.
2. $\boxed{\text{Si } \exists T>0 / \forall \theta \in D_\gamma^u, \theta+T \in D_\gamma^u \wedge f(\theta+T)=-f(\theta)}$

   → On étudie *f* sur un sous-ensemble de D_γ^u de longueur *T* et on obtient l'ensemble de la courbe Γ par des rotations successives d'angle $T+\pi$.

   Cas particulier : $T+\pi$ est de la forme $\frac{2n\pi}{m}$ $\left((n,m)\in\left(\mathbb{N}^*\right)^2\right)$ alors on obtiendra l'ensemble de la courbe Γ par *m* rotations successives.
3. $\boxed{\text{Si } \exists \alpha \in \mathbb{R} / \forall \theta \in D_\gamma^u, 2\alpha-\theta \in D_\gamma^u \wedge f(2\alpha-\theta)=f(\theta)}$

   → On étudie *f* sur $[\alpha,+\infty[\cap D_\gamma^u$ (ou $[-\infty,\alpha[\cap D_\gamma^u$) et Γ est symétrique par rapport à la droite passant par O(0,0) de vecteur directeur $\vec{u}_\alpha$.
4. $\boxed{\text{Si } \exists \alpha \in \mathbb{R} / \forall \theta \in D_\gamma^u, 2\alpha-\theta \in D_\gamma^u \wedge f(2\alpha-\theta)=-f(\theta)}$

   → On étudie *f* sur $\left[\alpha+\frac{\pi}{2},+\infty\right[\cap D_\gamma^u$ (ou $\left[-\infty,\alpha+\frac{\pi}{2}\right[\cap D_\gamma^u$) et Γ est symétrique par rapport à la droite passant par O(0,0) de vecteur directeur $\vec{u}_{\alpha+\frac{\pi}{2}}$.

Etude aux bornes infinies du domaine d'étude

On suppose ici que le domaine d'étude est de la forme $D_\gamma^E=[a,+\infty[$ (la démarche est analogue avec un domaine d'étude de la forme $D_\gamma^E=]-\infty,b]$ ou $]-\infty,+\infty[$) et on étudie $\lim\limits_{\theta\to+\infty} f(\theta)$.

Trois cas de figure sont envisageables :

1. $\lim\limits_{\theta\to+\infty} f(\theta)=0$ → L'origine est point limite et Γ s'enroule autour ;
2. $\lim\limits_{\theta\to+\infty} f(\theta)=r_0\neq 0$ → L'arc admet un cercle asymptote : il s'agit du cercle de centre O(0,0) et de rayon r_0 ;
3. $\lim\limits_{\theta\to+\infty} f(\theta)=\pm\infty$ → L'arc décrit une spirale.

Etude aux bornes finies du domaine d'étude

On suppose ici que le domaine d'étude est de la forme $D_\gamma^E = [a,b]$ où *b* est une borne finie.
On suppose que l'on a : $\lim_{\substack{\theta\to b\\ \theta<b}} |f(\theta)| = +\infty$.

Dans ce cas, l'arc admet une direction asymptotique de vecteur directeur $\vec{u}_b$.

En se plaçant alors dans le repère $\left(O,\vec{u}_b,\vec{u}_{b+\frac{\pi}{2}}\right)$, le vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$ s'écrit :

$$\overrightarrow{OM}(\theta) = X\vec{u}_\theta + Y\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}} = r\cos(\theta-b)\vec{u}_\theta + r\sin(\theta-b)\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$$

Deux cas de figure sont alors envisageables :

1. $\lim_{\substack{\theta\to b\\ \theta<b}} \left(r\sin(\theta-b)\right) = h$ → L'arc admet une asymptote d'équation $Y = h$ dans le repère $\left(O,\vec{u}_b,\vec{u}_{b+\frac{\pi}{2}}\right)$. Le signe de $\lim_{\substack{\theta\to b\\ \theta<b}} \left(r\sin(\theta-b)-h\right)$ donne alors la position de l'arc par rapport à l'asymptote (on note, en outre, que l'on a : $r\sin(\theta-b) \underset{b}{\sim} r(\theta-b)$).
2. $\lim_{\substack{\theta\to b\\ \theta<b}} |r\sin(\theta-b)| = +\infty$ → L'arc admet une branche parabolique de direction $\vec{u}_b$.

Tangente

→ **<u>On suppose ici que la fonction *f* ne pose pas de problème de dérivabilité</u>**.

On rappelle que : $\frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = \vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}$. Avec $\overrightarrow{OM}(\theta) = f(\theta)\vec{u}_\theta$, il vient :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{OM}(\theta)}{d\theta} = f'(\theta)\vec{u}_\theta + f(\theta)\vec{u}_{\theta+\frac{\pi}{2}}}$$

Deux cas de figure sont envisageables :

1. Si $f(\theta) \neq 0$, alors $\frac{d\overrightarrow{OM}(\theta)}{d\theta} \neq \vec{0}$ est un vecteur directeur de la tangente en $M(\theta)$.
2. Si $f(\theta) = 0$, alors $\vec{u}_\theta$ est vecteur directeur de la tangente en $M(\theta)$.

Remarque : si $f'(\theta) = 0$, la tangente est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{OM}(\theta)$.

Tout comme pour les arcs paramétrés définis en coordonnées cartésiennes, on mènera l'étude locale en un point en recherchant le premier vecteur dérivé non nul, $\frac{d^{(p)}\overrightarrow{OM}(\theta)}{d\theta^p}$ et le premier vecteur dérivé $\frac{d^{(q)}\overrightarrow{OM}(\theta)}{d\theta^q}$ $(q > p)$ linéairement indépendant du précédent. En fonction de la parité des entiers *p* et *q*, on sera confronté à l'un des quatre cas de figure possibles (point birégulier, d'inflexion ou de rebroussement (1$^{\text{ère}}$ ou 2$^{\text{ème}}$ espèce)).

Points stationnaires

On appelle « point stationnaire » un point $M(\theta)$ de l'arc γ pour lequel on a : $\frac{d\overrightarrow{OM}(\theta)}{d\theta} = \vec{0}$.

C'est à dire : $f(\theta) = f'(\theta) = 0$.

Points doubles

On appelle « point double » un point de l'arc γ tel que :

$$\exists \theta \in \mathbb{Z} / \left(\theta + 2k\pi \in D_\gamma^u \text{ et } f(\theta) = f(\theta + 2k\pi)\right)$$
$$\vee \left(\theta + (2k+1)\pi \in D_\gamma^u \text{ et } f(\theta) = -f(\theta + (2k+1)\pi)\right)$$

Etude pratique d'un arc paramétré

L'étude pratique d'un arc paramétré, qu'il soit défini en coordonnées cartésiennes ou polaires, se mène systématiquement en suivant les étapes ci-dessous.

1. Détermination de l'ensemble de définition, du domaine utile et du domaine d'étude.
   → Cette étude, si elle fournit un domaine utile strictement inclus dans l'ensemble de définition de l'arc doit conduire à élaborer le processus de construction de l'arc complet à partir du domaine utile (transformations géométriques).
2. Etude aux bornes de l'intervalle d'étude ;
3. Tableau de variation des fonctions $x(t)$ et $y(t)$;
   → étude locale aux éventuels points stationnaires ;
   → recherche des inflexions parmi les points non stationnaires.
4. Autres points particuliers : points doubles, intersections avec les axes.