Synthèse de cours (Terminale ES)

→ Calcul intégral

Définition et premières propriétés

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et soit a et b deux éléments de I.
On suppose que *f* admet des primitives sur I. Soit F l'une de ces primitives.
On appelle « intégrale de (la fonction) *f* de a à b » le réel $\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$. On le note :

$$\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)=\int_a^b f(x)\,dx$$

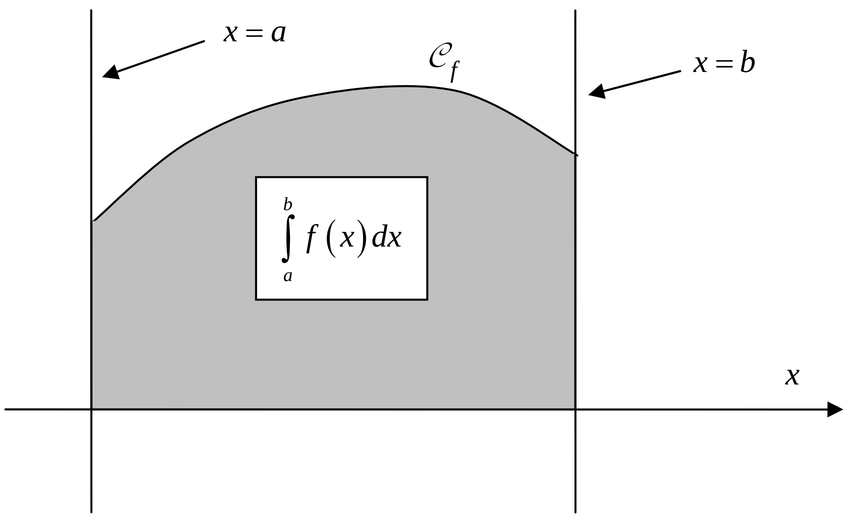
Remarque fondamentale : le réel $\int_a^b f(x)\,dx$ **ne dépend pas** de la primitive choisie pour le calcul.

Interprétation géométrique

Dans le cas où :

- $a<b$;
- La fonction *f* prend des valeurs positives sur l'intervalle $[a;b]$.

L'intégrale de *f* de a à b est égale à l'aire, en unité d'aire, du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction *f* et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ (voir zone grisée sur la figure ci-dessous).



Premières propriétés

De la définition on tire immédiatement :

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque : on peut rapprocher ces propriétés de propriétés analogues valables pour les vecteurs : $\overrightarrow{\mathrm{AA}} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BA}} = -\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Propriétés

Linéarité de l'intégrale

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur un intervalle I et soit *a* et *b* deux éléments de I.
On suppose que *f* et *g* admettent des primitives sur I.
Soit *k* un réel quelconque.
On a alors :

$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b (kf)(x)\,dx = \int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

Remarque : on aurait pu traduire la linéarité de l'intégrale en considérant deux réels *k* et *k'* quelconques et en écrivant :

$$\int_a^b (kf+k'g)(x)\,dx = \int_a^b \left(kf(x)+k'g(x)\right)dx = k\int_a^b f(x)\,dx + k'\int_a^b g(x)\,dx$$

Relation de Chasles

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et soit *a*, *b* et *c* trois éléments de I.
On suppose que *f* admet des primitives sur I.
On a alors :

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

Remarque : ici encore, l'analogie avec la relation du même nom pour les vecteurs est complète.

Positivité et ordre

Les hypothèses sur les fonctions *f* et *g* sont inchangées. On suppose ici : $\boxed{a \le b}$.

- **Si** *f* prend des valeurs positives sur l'intervalle $[a,b]$ **alors** : $\int_a^b f(x)\,dx \ge 0$;
- **Si** pour tout réel *x* de $[a,b]$ on a $f(x) \le g(x)$ **alors** : $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et soit *a* et *b* deux éléments de I tels que $\boxed{a < b}$.
On suppose que *f* admet des primitives sur I.
On appelle « valeur moyenne de (la fonction) *f* sur l'intervalle $[a,b]$ » le réel :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Interprétation géométrique

Dans le cas d'une fonction prenant des valeurs positives sur l'intervalle $[a,b]$, les réels *m* et $b-a$ sont les dimensions d'un rectangle dont l'aire est égale à l'aire du domaine limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de *f* et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.
En d'autres termes, le réel *m* est la valeur prise par une fonction constante dont l'intégrale sur l'intervalle $[a,b]$ est égale à celle de *f* sur ce même intervalle.