Synthèse de cours (Terminale ES)
→ Dérivation : rappels et compléments

Rappels de 1ère

Nombre dérivé

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.
Si la limite $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existe, on la note « $f'(a)$ » et on l'appelle « nombre dérivé de la fonction f en a ». Dans ce cas, on dit que « la fonction f est dérivable en a ».

Interprétation géométrique

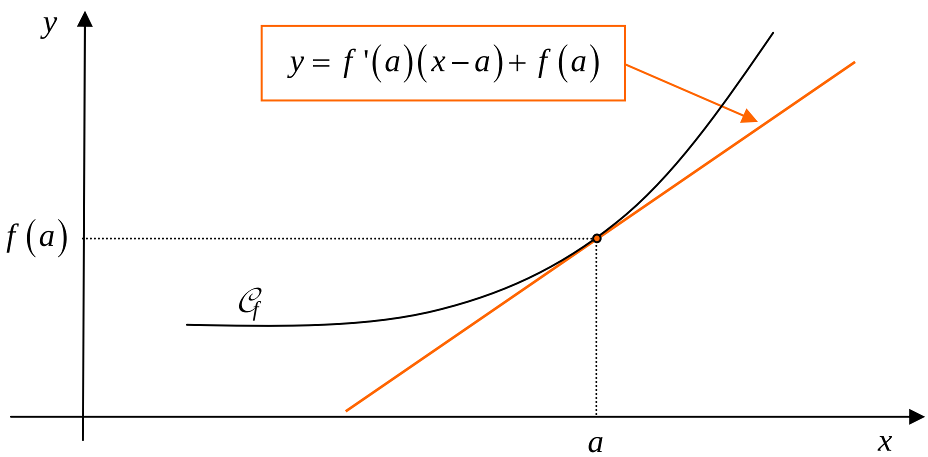
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un élément de I.
Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

Si f est dérivable en a **alors** admet une tangente au point $(a; f(a))$ et une équation de cette tangente est :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

On en tire l'équation réduite :

$$y = f'(a).x+f(a)-f'(a).a$$



Fonction dérivée

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

Si *f* est dérivable pour tout *x* de I, on dit que « la fonction *f* est dérivable sur I » et on note « *f'* » la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

La fonction *f'* est appelée « fonction dérivée de la fonction *f* ».

Fonctions dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Intervalle I (maximal)
$x \mapsto k$ $(k \in \mathbb{R})$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto 2x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto x^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ (si $n > 0$) $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$ (si $n < 0$)

Opérations et dérivation

Si *f* et *g* sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, la fonction *g* ne s'annulant pas sur I, et si *k* est un réel **alors** :

- La fonction $f + g$ est dérivable sur I et on a : $(f+g)' = f' + g'$;
- La fonction *kf* est dérivable sur I et on a : $(kf)' = kf'$;
- La fonction *fg* est dérivable sur I et on a : $(fg)' = f'g + fg'$;
- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$;
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Fonctions dérivables et sens de variation

On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si** f est croissante sur I **alors** f' est positive sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$) ;
- **Si** f est décroissante sur I **alors** f' est négative sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$) ;
- **Si** f est constante sur I **alors** f' est nulle sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$) ;

On suppose que f est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si** f' est positive sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$) **alors** f est croissante sur I ;
- **Si** f' est négative sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$) **alors** f est décroissante sur I ;
- **Si** f' est nulle sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$) **alors** f est constante sur I ;

Complément sur la dérivation : dérivée d'une fonction composée

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un ensemble inclus dans un intervalle J.
Soit g une fonction dérivable sur l'intervalle J.
Dans ces conditions, la fonction gof est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$(gof)' = f' \times (g'of)$$

Soit :

$$(gof)'(x) = f'(x) \times (g'of)(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Formulaire

Pour toute fonction u définie et dérivable sur un intervalle I (et, éventuellement, ne s'annulant pas sur I), on a :

Fonction	Dérivée
$x \mapsto u^n(x)$ (n entier différent de 1)	$x \mapsto n.u'(x).u(x)$
$x \mapsto \sqrt{u(x)}$	$x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

Remarque : dans le deuxième cas, la fonction u est à valeurs strictement positives.