# Synthèse de cours (Terminale S)
# → Dérivation : rappels et compléments

## Rappels de 1ère

### *Nombre dérivé*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $a$ un élément de I.

Si la limite $\lim\limits_{h \to 0, h \neq 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe, on la note « $f'(a)$ » et on l'appelle « nombre dérivé de la fonction $f$ en $a$ ». Dans ce cas, on dit que « la fonction $f$ est dérivable en $a$ ».

### *Interprétation géométrique*

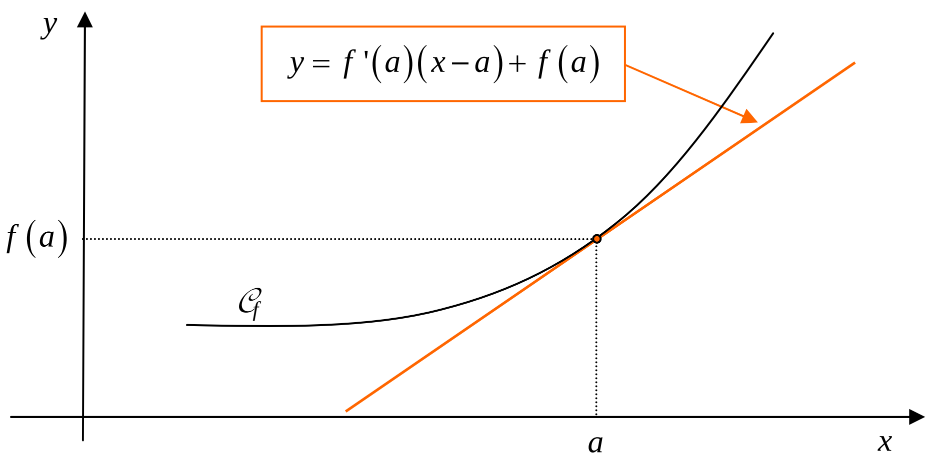
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle I et $a$ un élément de I.
Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère.

**Si** $f$ est dérivable en a **alors** $\mathcal{C}_f$ admet une tangente au point $(a; f(a))$ et <u>une équation</u> de cette tangente est :

$$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$$

On en tire <u>l'équation réduite</u> de la tangente :

$$y = f'(a).x + f(a) - f'(a).a$$



Remarque :

L'écriture $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$ équivaut à :

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\times h + \varepsilon(h)\times h$$

Avec : $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \varepsilon(h) = 0$.

Pour *h* petit, on pourra alors écrire : $\boxed{f(a+h) \simeq f(a) + f'(a)\times h}$, la quantité $f(a) + f'(a)\times h$ étant appelée « approximation affine de $f(a+h)$ au voisinage de $f(a)$ ».

## *Dérivabilité et continuité*

On a le théorème fondamental suivant :

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I et *a* un élément de I.

**Si** *f* est dérivable en *a* (sur I) **alors** *f* est continue en *a* (sur I).

Remarque : la réciproque est fausse (pour s'en convaincre, on pourra considérer la fonction valeur absolue en 0).

## *Fonction dérivée*

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

**Si** *f* est dérivable pour tout *x* de I, **alors** on dit que « la fonction *f* est dérivable sur I » et on note « *f'* » la fonction définie par :

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

La fonction *f'* est appelée « fonction dérivée de la fonction *f* ».

Remarque (peut être laissée de côté en première lecture) :

La notation « $f'$ » est due à Newton (1642-1727) et est couramment utilisée en mathématiques (en particulier dans le secondaire). Il en existe une autre, cette fois due à Leibniz (1646-1616), qui est elle fréquemment utilisée en physique, en économie … Il s'agit de « $\dfrac{dy}{dx}$ ».

Cette notation, dite « différentielle », exprime l'idée d'un rapport entre deux quantités (différences) infinitésimales et doit donc être rapprochée de $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ puisque cette limite peut être écrite : $\lim\limits_{h\to 0, h\neq 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{(a+h)-a}$.

En toute rigueur, on écrirait pour le nombre dérivé : $f'(a)=\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$.

La notation de Leibniz présente de nombreux avantages.
Si, au lieu de considérer des quantités infinitésimales, nous considérons de petites différences (nous les notons alors $\Delta x$ et $\Delta y$ en lieu et place, respectivement, de $dx$ et $dy$), nous pouvons écrire : $\left.\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right|_a \simeq f'(a)$ (ou, plus généralement $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \simeq f'(x)$), soit encore : $\Delta y|_a \simeq f'(a)\times \Delta x|_a$.
On retrouve ainsi l'idée fondamentale de l'approximation affine : une petite variation sur les abscisses entraînera, en première approximation, une petite variation sur les ordonnées qui lui est proportionnelle, le coefficient de proportionnalité n'étant rien d'autre que le nombre dérivé.
En posant alors : $\Delta y|_a = f(a+h)-f(a)$ et $\Delta x|_a = (a+h)-a = h$, on retrouve :
$f(a+h)-f(a) \simeq f(a)\times h$, soit : $f(a+h)\simeq f(a)+f'(a)\times h$.

## *Fonctions dérivées des fonctions usuelles*

Les fonctions rationnelles (dont les fonctions polynômes et la fonction inverse), la fonction racine carrée et les fonctions trigonométriques sont dérivables sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition (ATTENTION ! Ce résultat n'est pas valable pour la fonction racine carrée en 0).

| **Fonction** | **Dérivée** | **Intervalle I (maximal)** |
|---|---|---|
| $x \mapsto k$<br>($k\in\mathbb{R}$) | $x\mapsto 0$ | $\mathbb{R}$ |
| $x\mapsto x$ | $x\mapsto 1$ | $\mathbb{R}$ |
| $x\mapsto x^2$ | $x\mapsto 2x$ | $\mathbb{R}$ |
| $x\mapsto \dfrac{1}{x}$ | $x\mapsto -\dfrac{1}{x^2}$ | $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$ |
| $x\mapsto \sqrt{x}$ | $x\mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ | $\mathbb{R}^{+*}$ |
| $x\mapsto x^n$<br>($n\in\mathbb{Z}^*$) | $x\mapsto nx^{n-1}$ | $\mathbb{R}$ (si $n>0$)<br>$\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$ (si $n<0$) |
| sin | cos | $\mathbb{R}$ |
| cos | $-\sin$ | $\mathbb{R}$ |
| tan | $1+\tan^2=\dfrac{1}{\cos^2}$ | $\mathbb{R}\setminus\left\{(2k+1)\dfrac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$ |

## *Opérations et dérivation*

**Si** $f$ et $g$ sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, la fonction $g$ ne s'annulant pas sur I, et **si** $k$ est un réel **alors** :

- La fonction $f+g$ est dérivable sur I et on a : $(f+g)' = f' + g'$ ;
- La fonction $kf$ est dérivable sur I et on a : $(kf)' = kf'$ ;
- La fonction $fg$ est dérivable sur I et on a : $(fg)' = f'g + fg'$ ;
- La fonction $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ ;
- La fonction $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Remarque : à partir de la formule donnant la dérivée de $\frac{f}{g}$, on retrouve rapidement l'expression de la dérivée de $\frac{1}{g}$ …

## *Fonctions dérivables et sens de variation*

On suppose que $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si** $f$ est croissante sur I **alors** $f'$ est positive sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$) ;
- **Si** $f$ est décroissante sur I **alors** $f'$ est négative sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$) ;
- **Si** $f$ est constante sur I **alors** $f'$ est nulle sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$) ;

Remarque : une fonction $f$ peut être strictement croissante sur un intervalle et sa dérivée s'y annuler … On considèrera, par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$. Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée s'annule en 0 …

On suppose que $f$ est une fonction dérivable sur un intervalle I.

- **Si** $f'$ est (strictement) positive sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geq 0$) **alors** $f$ est (strictement) croissante sur I ;
- **Si** $f'$ est (strictement) négative sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leq 0$) **alors** $f$ est (strictement) décroissante sur I ;
- **Si** $f'$ est nulle sur I ($\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$) **alors** $f$ est constante sur I ;

# Dérivée d'une fonction composée

## *Propriété*

Soit $f$ une fonction dérivable sur un intervalle I et prenant ses valeurs dans un ensemble inclus dans un intervalle J.
Soit $g$ une fonction dérivable sur l'intervalle J.

Dans ces conditions, la fonction $gof$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$(gof)' = f' \times (g'of)$$

Soit :

$$(gof)'(x) = f'(x) \times (g'of)(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

On a en particulier :

Soit $a$ et $b$ deux réels, $a$ étant non nul.
Soit $f$ définie et dérivable sur I et soit $g$ la fonction définie par $g : x \mapsto f(ax+b)$ (elle est donc définie pour tout $x$ tel que $ax+b$ appartient à I).
Dans ces conditions, la fonction $g$ est dérivable et on a :

$$g'(x) = af'(ax+b)$$

(la fonction $g$ est la composée des fonctions $x \mapsto ax+b$ et $f$).

## *Formulaire*

Pour toute fonction $u$ définie et dérivable sur un intervalle I (et, éventuellement, ne s'annulant pas sur I), on a :

| Fonction | Dérivée |
|---|---|
| $x \mapsto u^n(x)$ | $x \mapsto n.u'(x).u^{n-1}(x)$ |
| $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ | $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ |

Remarques : dans le deuxième cas, la fonction $u$ est à valeurs strictement positives.

# Utilisation de la dérivée pour la recherche d'un extremum local

## *Notion d'extremum local*

Soit $f$ définie sur un intervalle I et soit $a$ un élément de I.
On dira que « $f$ admet un maximum (minimum) en $a$ » s'il existe un intervalle ouvert $\mathrm{I}_a$ contenant $a$ et inclus dans I tel que : $\forall x \in \mathrm{I}_a,\ f(x) \leq f(a)$ ( $f(x) \geq f(a)$).

On appelle « extremum local de $f$ » tout minimum local ou maximum local pour la fonction $f$.

## *Théorème*

Soit $f$ définie et dérivable sur un intervalle I et soit $a$ un élément de I.
**Si** $f$ admet un extremum local en $a$ **alors** $f'(a) = 0$.

La réciproque est fausse et la fonction $x \mapsto x^3$ nous donne encore un contre-exemple : sa dérivée s'annule en 0 mais elle n'y admet pas un extremum local !

On a cependant :

Soit $f$ définie et dérivable sur un intervalle I et soit $a$ un élément de I.
**Si** $f'(a) = 0$ et **si** $f'$ change de signe en $a$ **alors** $f$ admet un extremum local en $a$.