

Synthèse de cours (Terminale ES)

→ Conditionnement

Probabilité conditionnelle

Définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω . On suppose $p(B) \neq 0$.

On définit la probabilité de l'événement « A sachant B » notée $p(A|B)$ ou $p_B(A)$ par :

$$p(A|B) = p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Note : on dit également que « l'événement A est conditionné par l'événement B ».

Remarque : $p(A \cap B) = p(A|B)p(B) = p(B|A)p(A)$.

Evénements indépendants

Définition

Soit A et B deux événements d'un univers Ω .

On dira que « A et B sont des événements indépendants » si la réalisation de A ne dépend pas de celle de B (ou, ce qui est équivalent, si la réalisation de B ne dépend pas de celle de A).

Si $p(B) \neq 0$, cette définition équivaut à écrire :

$$p(A|B) = p(A)$$

(ou, si $p(A) \neq 0$: $p(B|A) = p(B)$)

Caractérisation

De la définition précédente on tire :

$$A \text{ et } B \text{ indépendants équivaut à } p(A \cap B) = p(A)p(B)$$

Remarques :

- L'événement certain (Ω), d'une part, et l'événement impossible (\emptyset), d'autre part, sont indépendants de tout autre événement de Ω ;
- Si A et B sont indépendants, alors A et \bar{B} , d'une part, \bar{A} et B , d'autre part, et \bar{A} et \bar{B} , enfin, sont indépendants.

Formule des probabilités totales

Partition d'un ensemble

Soit un univers Ω et soit $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ un ensemble de n parties (événements) non vides de Ω . On dira que les B_i forment une « partition » de Ω si :

- Les B_i sont deux à deux disjoints : $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, i \neq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$;
- La réunion des B_i est égale à l'univers : $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \bigcup_{i=1}^n B_i = \Omega$.

Exemple fondamental : Dans un univers Ω , une partie A non vide et différente de Ω et son complémentaire \bar{A} (soit, en termes d'événement, l'événement A et son contraire) forment une partition de Ω puisque l'on a : $\bar{A} \neq \emptyset, A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = \Omega$.

Formule des probabilités totales

Soit A un événements d'un univers Ω et soit $\{B_1, B_2, \dots, B_n\}$ une partition de cet univers.

On a :

$$\begin{aligned} p(A) &= p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + \dots + p(A \cap B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n p(A \cap B_i) \\ &= p(A | B_1) p(B_1) + p(A | B_2) p(B_2) + \dots + p(A | B_n) p(B_n) \\ &= \sum_{i=1}^n p(A | B_i) p(B_i) \end{aligned}$$

Cette formule est appelée « formule des probabilités totales ».