# Synthèse de cours (Terminale S)
# → Continuité et théorème des valeurs intermédiaires

Note : dans ce document, I désigne un intervalle non vide non réduit à une seule valeur et $a$ un élément de I. On note $f(\mathrm{I})$ l'ensemble des valeurs de $f(x)$ quand $x$ varie dans I.

## Continuité

### *Définitions*

Soit $f$ une fonction définie sur I.

On dira que « $f$ est continue (resp. « continue à gauche »/« continue à droite ») en $a$ » si $f$ admet une limite en $a$ telle que :

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

$$\text{(resp. } \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = f(a) \,/\, \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = f(a)\text{)}$$

On dira que « $f$ est continue sur I » si $f$ est continue en tout point de I.

Remarque : lorsqu'une fonction est continue sur un intervalle I, on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

### *Exemples fondamentaux*

Les fonctions rationnelles (dont les fonctions polynômes et la fonction inverse), la fonction racine carrée et les fonctions trigonométriques (sinus, cosinus et tangente) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

### *Continuité et opérations*

#### Multiplication d'une fonction continue par un réel

Soit $f$ une fonction définie sur I et soit $\alpha$ un réel.

**Si** $f$ est continue en $a$ (resp. sur I) **alors** $\alpha f$ est continue en $a$ (resp.sur I).

## Somme de deux fonctions continues

Soit *f* et g deux fonctions définies sur I.

**Si** *f* et *g* sont continues en *a* (resp. sur I) **alors** $f+g$ est continue en *a* (resp. sur I).

## Produit de deux fonctions continues

Soit *f* et *g* deux fonctions définies sur I.

**Si** *f* et *g* sont continues en *a* (resp. sur I) **alors** $f\times g$ est continue en *a* (resp. sur I).

### *Composée de deux fonctions continues*

Soit *f* une fonction définie sur I et *g* une fonction définie sur un intervalle J contenant $f(\mathrm{I})$.

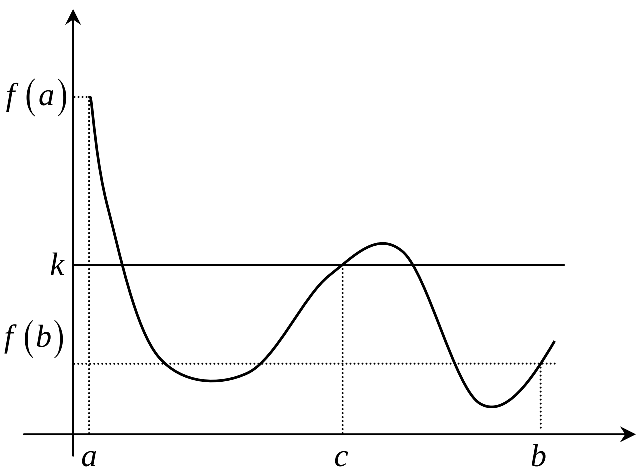
**Si** *f* est continue en *a* et si *g* est continue en $f(a)$ **alors** $gof$ est continue en *a*.

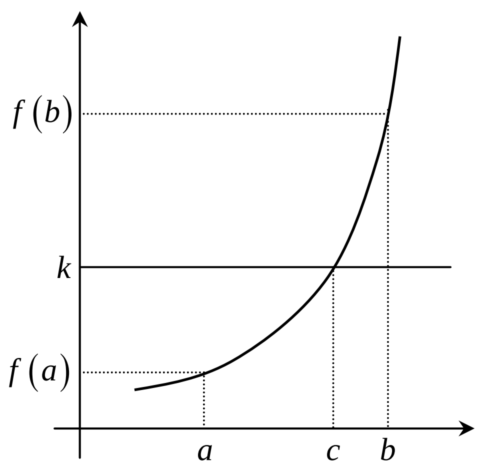
# Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ et soit *k* un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

**Si** *f* est continue sur $[a;b]$ **alors** il existe un réel *c* appartenant à $[a;b]$ tel que : $f(c)=k$ (voir figure de gauche ci-dessous).

**Si** *f* est continue sur $[a;b]$ **et si** *f* est strictement monotone sur $[a;b]$ **alors** il existe un <u>unique</u> réel *c* appartenant à $[a;b]$ tel que : $f(c)=k$ (voir figure de droite ci-dessous).



La première (seconde) formulation s'interprète en disant que « la fonction *f* prend (une fois et une seule) toutes les valeurs comprises entre $f(a)$ et $f(b)$ ».

Remarques :

❶ Le théorème précédent peut être généralisé (et on utilise souvent cette formulation plus générale dans la pratique …) à un intervalle I ouvert ou semi-ouvert dont les bornes sont éventuellement infinies.

Dans ce cas, on ne raisonnera pas avec $f(a)$ et $f(b)$ mais avec les limites (éventuellement infinies) de la fonction *f* en *a* et *b*.

Considérons par exemple la fonction inverse sur l'intervalle $]0;1]$. Elle y est continue et strictement décroissante. Par ailleurs, on a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1$.

Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que pour tout réel *k* de l'intervalle $[1;+\infty[$, il existe un unique réel *c* dans $]0;1]$ tel que $f(c) = k$.

❷ Dans un tableau de variation, une flèche signifie, par convention, que la fonction, sur l'intervalle considéré, est <u>continue et strictement monotone</u>.