Synthèse de cours (Terminale ES)
→ Continuité, limites

Continuité

Définition

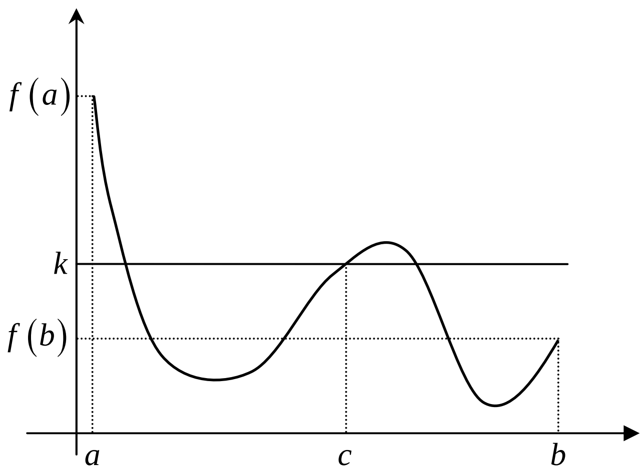
Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dira que « f est continue sur I » si l'on peut tracer sa courbe représentative sans lever le crayon.

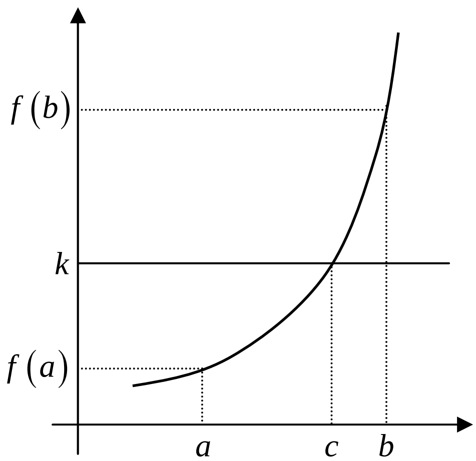
Exemples fondamentaux

Les fonctions polynômes (dont les fonctions affines), la fonction racine carrée, les fonctions rationnelles (dont la fonction inverse) sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

Le théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a;b]$ et soit k un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.
Si f est continue sur $[a;b]$ alors il existe un réel c appartenant à $[a;b]$ tel que : $f(c)=k$ (voir figure de gauche ci-dessous).
Si, de plus, f est strictement monotone sur $[a;b]$ alors le réel c est unique (voir figure de droite ci-dessous).





Limite d'une fonction

Limite d'une fonction continue en un point de l'ensemble de définition

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
Soit a un élément de $\mathcal{D}_f$. On suppose qu'il existe un intervalle I contenant a et contenu dans $\mathcal{D}_f$ sur lequel f est continue.
On a alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Limites de fonctions de référence (Rappels de 1ère)

- Fonction affine : $x \mapsto ax+b$
  - Si $a>0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax+b) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax+b) = -\infty$;
  - Si $a<0$, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} (ax+b) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (ax+b) = +\infty$.

- Fonction carrée : $x \mapsto x^2$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = \lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$;

- Fonction cube : $x \mapsto x^3$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$;
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.

- Fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$
  - $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$;

- Fonctions inverses : $x \mapsto \dfrac{1}{x-a}$
  - $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a}} \dfrac{1}{x-a} = +\infty$;
  - $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x<a}} \dfrac{1}{x-a} = -\infty$;
  - $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x-a} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x-a} = 0$.

Opérations sur les limites

Dans ce qui suit, a désigne un réel ou $-\infty$ ou $+\infty$.

Limite d'une somme

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f+g)(x)$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**FI**

Limite d'un produit

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l \neq 0$	0	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	l'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} (f\times g)(x)$	$l \times l'$	$\pm\infty$ (*)	**FI**	$\pm\infty$ (*)

(*) Le signe de la limite infinie est déterminé grâce à la règle des signes.

Limite d'un rapport

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	l	$l\ (\neq 0)$	0	l	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$l'\ (\neq 0)$	0	0	$\pm\infty$	l'	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$\pm\infty$ (*)	**FI**	0	$\pm\infty$ (*)	**FI**

(*) Le signe de la limite infinie est déterminé grâce à la règle des signes.

Limites en $-\infty$ et $+\infty$ d'une fonction polynôme, d'une fonction rationnelle

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction polynôme est égale à celle de son terme de plus haut degré.

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle est égale à celle du rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

La limite en $+\infty$ ou $-\infty$ d'une fonction rationnelle peut donc être finie (éventuellement nulle) ou infinie :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\boxed{3x^6}-4x^4+x-12}{\boxed{-6x^3}-2x+7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^6}{-6x^3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3}{-2} = -\infty$;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\boxed{-5x^2}+67x-56}{\boxed{-7x^5}-45x^4-34x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-5x^2}{-7x^5} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{7x^3} = 0$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\boxed{35x^6}-45x^2+3x-2}{\boxed{20x^6}-11x^5+3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{35x^6}{20x^6} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{7}{4} = \dfrac{7}{4}$.

Limite d'une fonction composée

a, *b* et *c* désignent des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ **et** $\lim\limits_{X\to b} g(X)=c$ **alors** $\lim\limits_{x\to a}(gof)(x)=\lim\limits_{x\to a} g(f(x))=c$

Limite par comparaison

Si, pour $x \geq x_0$ (resp. $x \leq x_0$,) on a $f(x) \geq g(x)$, **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=+\infty$) **alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$).

Si, pour $x \geq x_0$ (resp. $x \leq x_0$,) on a $f(x) \leq g(x)$, **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$) **alors** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$).

Si, pour $x \geq x_0$ (resp. $x \leq x_0$,) on a $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=l$) **alors** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=l$).

Remarque : le dernier théorème est souvent appelé « théorème des gendarmes » (les fonctions *g* et *h* prenant toutes deux des valeurs de plus en plus proches de la limite commune *l*, *f* n'a d'autre choix de s'en rapprocher également.

Asymptote (rappels de 1ère)

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ et de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
Soit *a* un élément de $\mathcal{D}_f$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x)=\pm\infty$ alors $\mathcal{C}_f$ admet en a une asymptote verticale d'équation $x=a$.

Soit *f* une fonction de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.
Si on a : $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$ (resp. $\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$) alors on dit que « la droite d'équation $y=ax+b$ est asymptote (oblique) à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ».
Dans le cas où $a=0$, l'asymptote est une « asymptote horizontale ».

Pour étudier, le cas échéant, la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à celle de l'asymptote d'équation $y=ax+b$, on étudier le signe de la différence $f(x)-(ax+b)$.