Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Convexité des fonctions réelles de la variable réelle

Définitions

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle I non réduit à un point.

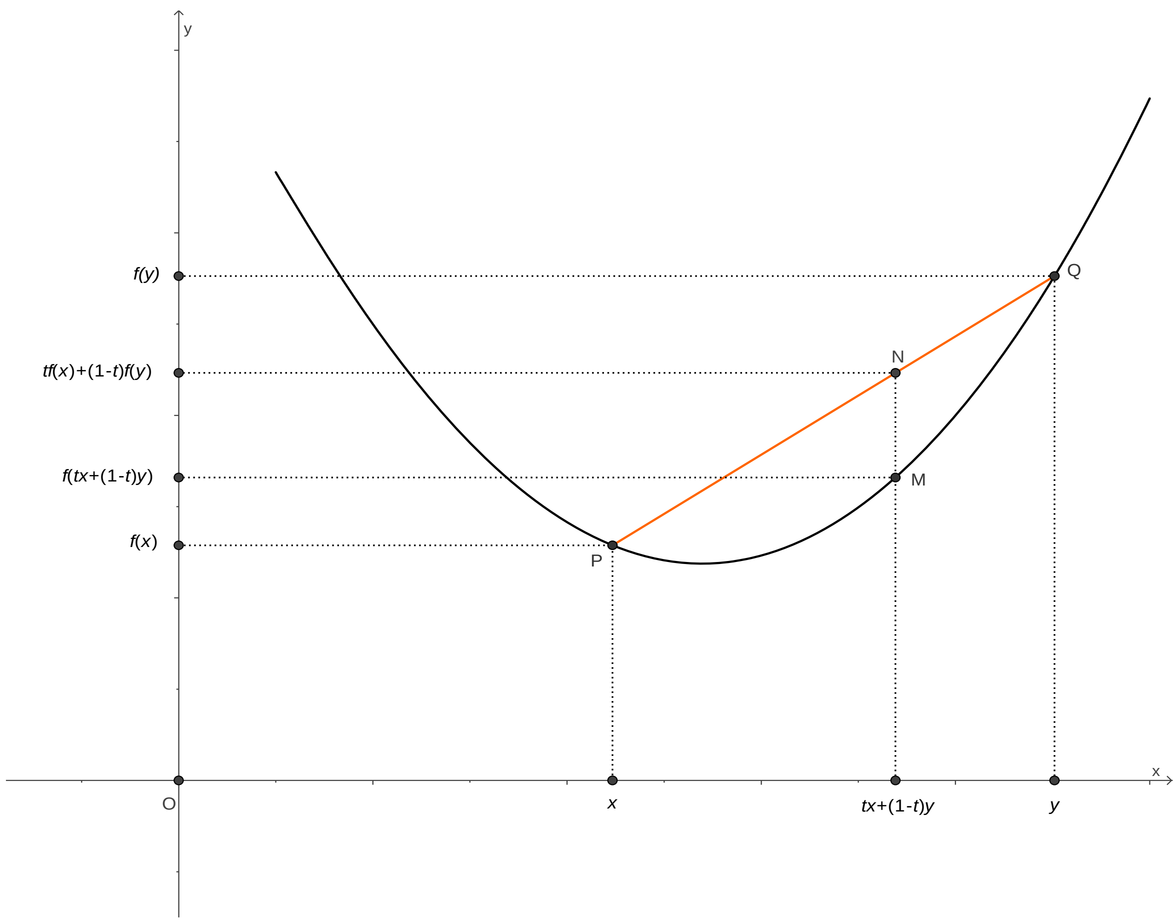
On dit que « la fonction f est convexe sur I » si on a :

$$\forall (x,y) \in \mathrm{I}^2,\ \forall t \in [0;1],\ f\left(tx+(1-t)y\right) \leq tf(x)+(1-t)f(y)$$

On dit que « la fonction f est concave sur I » si la fonction $-f$ est convexe sur I.

Etudier la convexité d'une fonction c'est déterminer les intervalles sur lesquels elle est convexe ou concave.

Interprétation graphique de la convexité :



Sur le graphique de la page précédente, on a fait apparaître les points $\mathrm{P}\left(x, f\left(x\right)\right)$, $\mathrm{Q}\left(y, f\left(y\right)\right)$, $\mathrm{Q}\left(tx+\left(1-t\right)y, f\left(tx+\left(1-t\right)y\right)\right)$ et $\mathrm{N}\left(tx+\left(1-t\right)y, tf\left(x\right)+\left(1-t\right)f\left(y\right)\right)$.

Le point N n'est autre que le barycentre des points P et Q respectivement pondérés par les coefficients t et $1-t$ (Comme t appartient à l'intervalle $\left[0;1\right]$, le point N est donc un point de la corde $\left[\mathrm{PQ}\right]$). La convexité traduit le fait que le point M est situé en-dessous du point N (son ordonnée est inférieure à celle du point N). Plus généralement, la fonction est convexe (respectivement concave) sur l'intervalle I si pour tous points $\mathrm{P}\left(x, f\left(x\right)\right)$ et $\mathrm{Q}\left(y, f\left(y\right)\right)$, avec x et y dans I, la courbe représentative de f est située en-dessous (respectivement au dessus) de la corde $\left[\mathrm{PQ}\right]$.

Propriétés

Caractérisation

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle I non réduit à un point.

Les propositions suivantes sont équivalentes :

(1) La fonction f est convexe sur I.

(2) $\forall\left(x,y,z\right)\in \mathrm{I}^3, x<y<z \Rightarrow \dfrac{f\left(y\right)-f\left(x\right)}{y-x} \leq \dfrac{f\left(z\right)-f\left(x\right)}{z-x} \leq \dfrac{f\left(z\right)-f\left(y\right)}{z-y}$.

(3) Pour tout x_0 de I, l'application, appelée « application pente en x_0 », définie sur $\mathrm{I}\setminus\left(x_0\right)$ par : $x \mapsto \dfrac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$, est croissante.

(4) $\forall\left(x,y,z\right)\in \mathrm{I}^3, x<y<z \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ f\left(x\right) & f\left(y\right) & f\left(z\right) \end{vmatrix} \geq 0$.

La mid-convexité

Définition

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle I non réduit à un point.

On dit que « la fonction *f* est mid-convexe sur I » si on a :

$$\forall (x,y)\in I^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Fonction continue mid-convexe

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle I non réduit à un point.

Si *f* est continue **et** mid-convexe sur I **alors** *f* est convexe sur I.

Des inégalités classiques

L'inégalité de Jensen

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle I non réduit à un point et soit *n* un entier supérieur ou égal à 2.

On suppose que la fonction *f* est convexe sur I.

Alors pour tout *n*-uplet $(t_1,t_2,...,t_n)$ de réels positifs vérifiant $t_1+t_2+...+t_n=1$ et tout *n*-uplet $(x_1,x_2,...,x_n)$ d'éléments de I, on a :

$$f(t_1x_1+t_2x_2+...+t_nx_n)\le t_1f(x_1)+t_2f(x_2)+...+t_nf(x_n)$$

C'est « l'inégalité de Jensen ». On peut l'écrire :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}t_ix_i\right)\le\sum_{i=1}^{n}t_if(x_i)$$

Les inégalités de Hölder et de Minkowski

Soit n un entier naturel non nul.

Soit $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ et $\left(y_1, y_2, ..., y_n\right)$ deux n-uplets de réels strictement positifs.

- **Si** p et q sont deux réels tels que : $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ **alors** on a l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{q}}$$

- **Si** p un réel strictement supérieur à 1 **alors** on a l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \left(x_k + y_k\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

Continuité et dérivabilité des fonctions convexes

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un intervalle I non réduit à un point et soit $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ l'intérieur de I.

On a alors :

(1) La fonction f est continue sur $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$.

(2) La fonction f est dérivable à gauche et à droite en tout point de $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$ et on a :

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{\mathrm{I}}{}^2, x < y \Rightarrow f_g'(x) \leq f_d'(x) \leq \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq f_g'(y) \leq f_d'(y)$$

(3) Les fonctions f_g' et f_d' sont croissantes sur $\overset{\circ}{\mathrm{I}}$.

(4) L'ensemble des points de I où la fonction f n'est pas dérivable est au plus dénombrable.

Le cas des fonctions dérivables

Cas d'une fonction dérivable

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

$$f \text{ est convexe sur I} \Leftrightarrow f\,' \text{ est croissante sur I}$$

Cas d'une fonction deux fois dérivable

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie et dérivable sur un intervalle I non réduit à un point.

$$f \text{ est convexe sur I} \Leftrightarrow f\,'' \text{ est positive sur I}$$