Synthèse de cours (Terminale S)
→ Equations différentielles

L'équation différentielle : $y' = ay$

Théorème

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ (où a est un réel) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto y(x) = Ce^{ax}$$

où C est une constante réelle

Remarques :

1. Lorsque $a = 0$, l'équation s'écrit simplement $y' = 0$ et les solutions sont les fonctions constantes, solutions que l'on retrouve bien en prenant $a = 0$ dans l'expression Ce^{ax}.
2. Les fonctions données par le théorème sont définies sur $\mathbb{R}$. Dans telle ou telle situation appliquée, on pourra être amené à considérer une telle fonction définie sur un intervalle I.

L'équation différentielle : $y' = ay + b$

Théorème

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ (où a et b sont des réels, <u>a étant non nul</u>) sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

où C est une constante réelle

Remarques :

1. Lorsque $a = 0$, l'équation s'écrit simplement $y' = b$ et les solutions sont les fonctions affines de la forme $y = bx + C$. On a affaire à un simple calcul de primitives.
2. Les fonctions données par le théorème sont définies sur $\mathbb{R}$. Dans telle ou telle situation appliquée, on pourra être amené à considérer une telle fonction définie sur un intervalle I.

Conditions initiales

Théorèmes

Lorsqu'on se donne un couple de réels $(x_0; y_0)$, on peut être amené à chercher une solution y de l'équation différentielle vérifiant : $y_0 = y(x_0)$. Une telle égalité est appelée « condition initiale ».

On a les théorèmes :

Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$, l'équation $y' = ay$ admet une unique solution vérifiant la condition initiale $y_0 = y(x_0)$. Il s'agit de la fonction :

$$x \mapsto y_0 e^{a(x-x_0)}$$

Pour tout couple de réels $(x_0; y_0)$, l'équation $y' = ay + b$ admet une unique solution vérifiant la condition initiale $y_0 = y(x_0)$. Il s'agit de la fonction :

$$x \mapsto \left(y_0 + \frac{b}{a} \right) e^{a(x-x_0)} - \frac{b}{a}$$

Remarque : ces expressions ne doivent pas être apprises par cœur ! Il convient de savoir les retrouver et de mémoriser l'unicité de ces solutions.