

Synthèse de cours PanaMaths (TES)

→ La fonction exponentielle

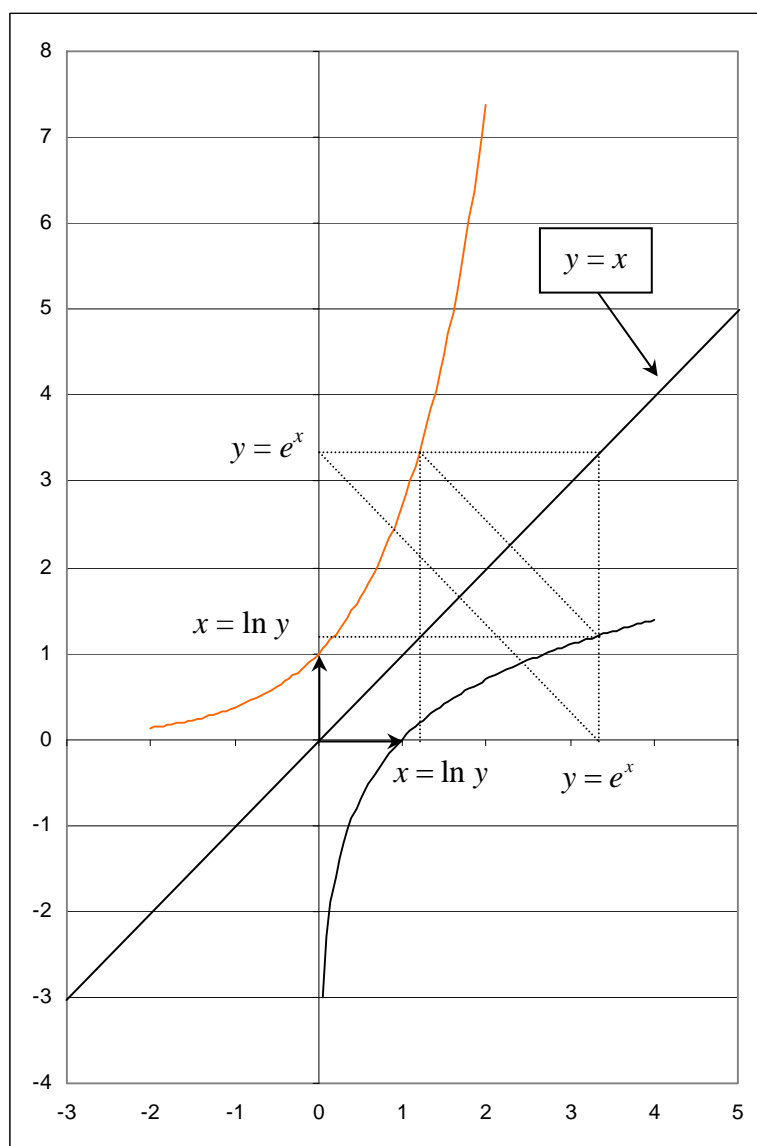
Définition

Pour tout réel x , on définit le réel e^x (on lit « exponentielle x » ou « exponentielle de x ») comme l'unique réel dont le logarithme népérien est x .

la fonction exponentielle, notée « exp », est la fonction qui à x associe e^x (voir la courbe représentative en orange ci-dessous) :

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \mapsto y = \exp(x) = e^x \text{ où } \ln y = x$$



Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de la fonction logarithme népérien et de la fonction exponentielle sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (1^{ère} bissectrice).

Propriétés découlant directement de la définition

- $\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$;
- $e^0 = 1$ (car $\ln 1 = 0$) ;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$;
- $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, e^{\ln x} = x$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$.

Propriétés algébriques

- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, e^{x+y} = e^x e^y$;
On peut généraliser ce résultat à l'exponentielle d'une somme de n réels :
$$e^{x_1+x_2+\dots+x_n} = e^{x_1} e^{x_2} \dots e^{x_n}$$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (e^x)^n = e^{nx}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} = \frac{1}{e^x}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y}$.

Remarque : on retrouve fondamentalement les propriétés des puissances d'exposants relatifs (mais ici l'exposant est réel !).

Etude de la fonction exponentielle

Ensemble de définition

$$D_{\text{exp}} = \mathbb{R}$$

Dérivée

La fonction exponentielle est dérivable sur \mathbb{R} et sa dérivée est égale à elle-même :
$$\forall x \in \mathbb{R}, (\text{exp})'(x) = \text{exp}(x)$$

Sens de variation

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur \mathbb{R} .

Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Composée de l'exponentielle et d'une fonction dérivable

Dans ce qui suit, f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

Dérivée

La fonction composée $\exp \circ f$ est dérivable sur l'intervalle I et on a :

$$\forall x \in I, (\exp \circ f)'(x) = (e^f)'(x) = f'(x) \times e^{f(x)}$$

On retiendra : $(e^f)' = f' \times e^f$.

Primitives

La fonction $f' \cdot (\exp \circ f)$ est intégrable sur l'intervalle I et ses primitives sont les fonctions définies par :

$$x \mapsto e^{f(x)} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.