

Synthèse de cours PanaMaths

→ Fonctions hyperboliques réciproques

Définition

Les fonctions sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définissent deux bijections de \mathbb{R} dans \mathbb{R} et la fonction cosinus hyperbolique définit une bijection de \mathbb{R}_+ dans $[1; +\infty[$. On peut donc définir les fonctions réciproques correspondantes :

- La fonction réciproque de la fonction sinus hyperbolique est appelée « argument sinus hyperbolique » et est notée $\arg \sinh$ (ou $\arg sh$). Pour tout réel x , on a :

$$y = \sinh(x) \Leftrightarrow x = \arg \sinh(y)$$

- La fonction réciproque de la fonction cosinus hyperbolique est appelée « argument cosinus hyperbolique » et est notée $\arg \cosh$ (ou $\arg ch$). Pour tout réel positif x , on a :

$$y = \cosh(x) \Leftrightarrow x = \arg \cosh(y)$$

- La fonction réciproque de la fonction tangente hyperbolique est appelée « argument tangente hyperbolique » et est notée $\arg \tanh$ (ou $\arg th$). Pour tout réel x , on a :

$$y = \tanh(x) \Leftrightarrow x = \arg \tanh(y)$$

Expressions à l'aide du logarithme népérien

Pour tout réel x , on a :

$$\arg \sinh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\arg \tanh(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

Pour tout x réel supérieur à 1, on a :

$$\arg \cosh(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

Parité

Les fonctions argument sinus hyperbolique et argument tangente hyperbolique sont impaires.

Continuité

Les fonctions argument sinus hyperbolique et argument tangente hyperbolique sont continues sur \mathbb{R} .

La fonction argument cosinus hyperbolique est continue sur $[1; +\infty[$.

Limites

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow -\infty} \arg \sinh(x) = -\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \arg \sinh(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1} \arg \cosh(x) = \arg \cosh(1) = 0 & \lim_{x \rightarrow +\infty} \arg \cosh(x) = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \tanh(x) = -\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \tanh(x) = +\infty \end{array}$$

Equivalences

$$\begin{array}{l} \arg \sinh(x) \underset{+\infty}{\sim} \arg \cosh(x) \underset{+\infty}{\sim} \ln x \\ \arg \sinh(x) \underset{-\infty}{\sim} -\ln(-x) \end{array}$$

Sens de variation

Les fonctions réciproques des fonctions hyperboliques sont strictement croissantes sur leurs ensembles de définition respectifs.

Dérivées

La fonction argument sinus hyperbolique est dérivable sur \mathbb{R} et on a, pour tout réel x :

$$\operatorname{arg\,sinh}'(x) = \frac{d \operatorname{arg\,sinh}}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

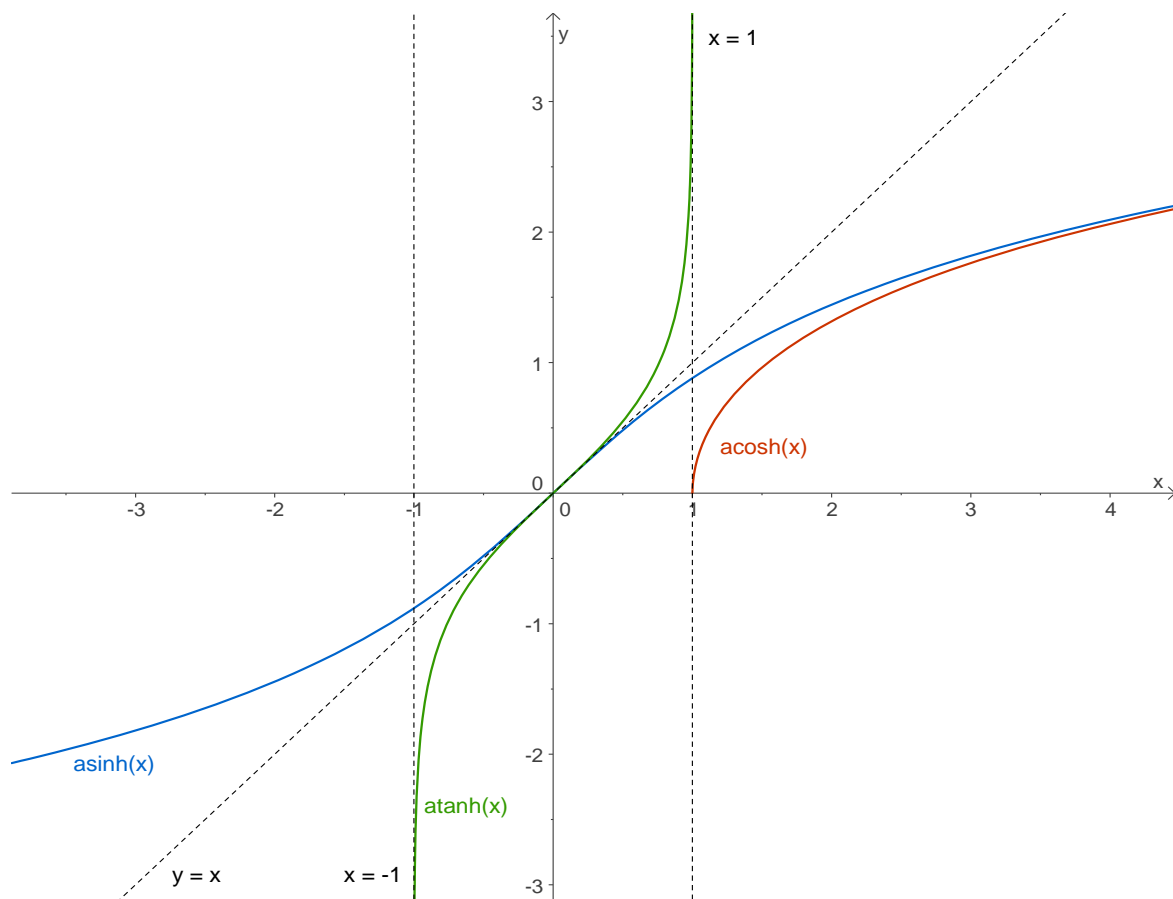
La fonction argument cosinus hyperbolique est dérivable sur $]1; +\infty[$ et on a, pour tout réel x strictement supérieur à 1 :

$$\operatorname{arg\,cosh}'(x) = \frac{d \operatorname{arg\,cosh}}{dx}(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

La fonction argument tangente hyperbolique est dérivable sur $] -1; 1[$ et on a, pour tout réel x strictement compris entre -1 et 1 :

$$\operatorname{arg\,tanh}'(x) = \frac{d \operatorname{arg\,tanh}}{dx}(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Courbes représentatives



Remarque : sur la figure ci-dessus, on a fait apparaître :

- Les deux asymptotes verticales (à la courbe représentative de la fonction argument tangente hyperbolique) d'équations $x = -1$ et $x = 1$, la seconde étant également le support de la demi-tangente verticale à la courbe représentation de la fonction argument cosinus hyperbolique au point $(1; 0)$.
- La tangente, d'équation $y = x$, à l'origine aux courbes représentatives des fonctions argument sinus hyperbolique et argument tangente hyperbolique.