Synthèse de cours (Terminale S)

→ Limite d'une fonction

Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

Fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
On dira que « la fonction *f* est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) » s'il existe un réel A tel que l'intervalle $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$) soit inclus dans $\mathcal{D}_f$.

Limite d'une fonction en $+\infty$ (resp. $-\infty$)

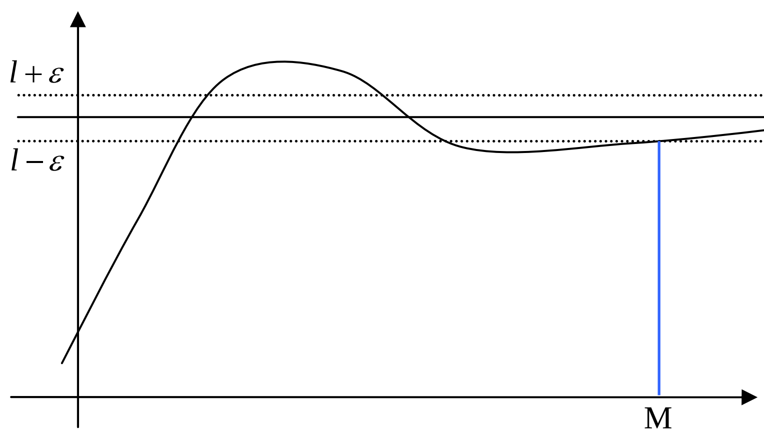
Cas d'une limite finie

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
On suppose que *f* est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) sur $]A;+\infty[$ (resp. $]-\infty;A[$).

On dira que la fonction *f* admet une limite *l* en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$ ($\varepsilon>0$), il existe un réel M de $]A;+\infty[$ (resp. de $]-\infty;A[$) tel que pour tout *x* supérieur (resp. inférieur) à M, on a $f(x)\in\,]l-\varepsilon;l+\varepsilon[$. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{resp. } -\infty)}} f(x)=l$$

Interprétation géométrique (voir ci-dessous) : dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction *f* admet au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) une asymptote horizontale d'équation $y=l$.



Exemples classiques : $\forall a \in \mathbb{R},\ \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-a} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-a} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0$.

Cas d'une limite infinie

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On dira que la fonction f admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, pour tout réel B, il existe un réel M de $\mathcal{D}_f$ tel que pour tout x supérieur (resp. inférieur) à M, on a $f(x) > \mathrm{B}$ (resp. $f(x) < \mathrm{B}$). On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{resp. } -\infty)}} f(x) = +\infty \ (\text{resp. } -\infty)$$

Interprétation de la définition de $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$: pour tout réel (sous-entendu arbitrairement grand), il existe une valeur de l'ensemble de définition de la fonction au-delà de laquelle <u>toutes les valeurs</u> prises par la fonction seront supérieures au réel considéré (de fait, une telle fonction ne sera pas majorée !). Attention ! Ce qui précède n'implique en rien que la fonction soit croissante ! On pourra par exemple considérer, pour s'en convaincre, la fonction :
$x \mapsto 2x + 5 - 7\frac{\sin x}{x}$.

Notion d'asymptote oblique

Soit f une fonction d'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
On suppose que f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

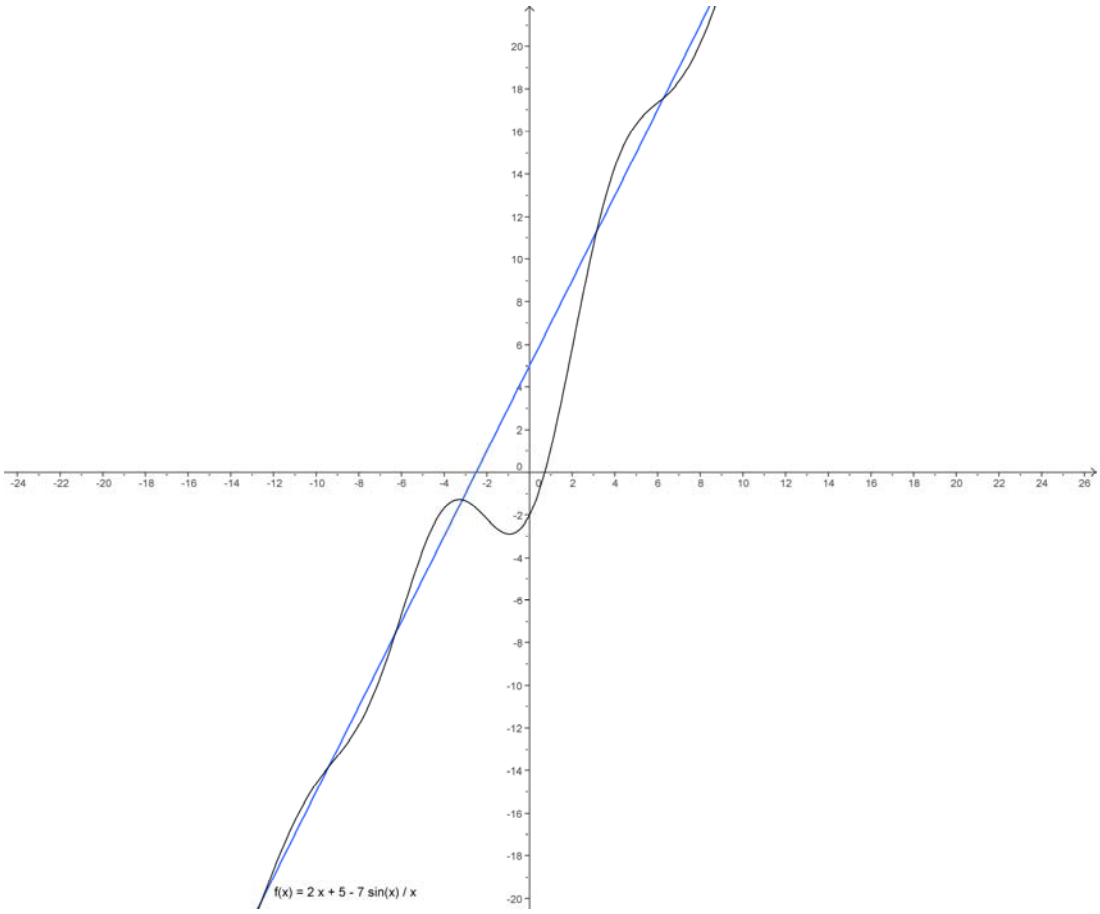
On dira que la fonction f admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) une asymptote oblique Δ d'équation $y = ax + b$ (ou « que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ (resp. $-\infty$) ») si on a :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{resp. } -\infty)}} \left[f(x) - (ax+b) \right] = 0$$

Remarques :

- Lorsqu'elle existe, l'asymptote est unique !
- Pour étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à Δ, on étudie le signe de la différence $f(x) - (ax+b)$ (cette étude se fait, à priori, sur $\mathcal{D}_f$).

Attention ! Ce signe n'a aucun raison d'être constant. La fonction ci-dessus admet la droite d'équation $y = 2x + 5$ comme asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ mais la différence change périodiquement de signe … (cf. la figure ci-dessous)



La fonction $f : x \mapsto 2x + 5 - 7\dfrac{\sin x}{x}$ *et son asymptote oblique d'équation* $y = 2x + 5$.

Limite d'une fonction en un réel

Cas d'une limite finie

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et soit *a* un réel.

On suppose qu'il existe un réel strictement positif *r* tel que $]a - r; a + r[- \{a\} \subset \mathscr{D}_f$ (on note que la fonction *f* n'est pas nécessairement définie en *a*. On dit que « *f* est définie dans un voisinage de *a* sans nécessairement être définie en *a* »).

On dira que la fonction *f* admet une limite finie *l* en *a* si pour tout réel ε strictement positif, on peut trouver un réel strictement positif α tel que si $x \in]a - \alpha; a + \alpha[\cap \left( ]a - r; a + r[- \{a\} \right)$ alors on aura $f(x) \in]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$. On écrit alors :

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

Exemples classiques : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}=0$, … (On notera que ces limites correspondent en fait à des nombres dérivés).

Remarques :

- On définira de façon similaire les (éventuelles) limites à droite et à gauche de *f* en *a*. On écrira alors : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ pour la limite à droite et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ pour la limite à gauche.

  Par exemple, la fonction $x\mapsto\sqrt{x^2-4}$ admet une limite à droite en $a=2$ mais n'admet pas de limite à gauche en ce réel.

  On remarquera également que l'existence de ces deux limites n'implique en rien leur égalité (considérer la fonction partie entière en un réel $a\in\mathbb{Z}$) ;
- Enfin, on peut avoir $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)\neq f(a)$.

Cas d'une limite infinie

Soit *f* une fonction d'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ et soit *a* un réel.
On suppose qu'il existe un réel strictement positif *r* tel que $]a-r;a+r[-\{a\}\subset\mathscr{D}_f$ (on note que la fonction *f* n'est pas nécessairement définie en *a*. On dit que « *f* est définie dans un voisinage de *a* sans nécessairement être définie en *a* »).

On dira que la fonction *f* admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite en *a* si pour tout réel B, on peut trouver un réel strictement positif α tel que si $x\in]a-\alpha;a+\alpha[\cap(]a-r;a+r[-\{a\})$ alors on aura $f(x)>\mathrm{B}$ (resp. $f(x)<\mathrm{B}$). On écrit alors :

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \text{ (resp. } -\infty\text{)}$$

Remarque : comme précédemment, on peut « seulement » avoir une limite infinie à gauche et/ou à droite de *a*. On considèrera, à titre d'illustration, l'exemple suivant : $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}}\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Interprétation géométrique. Si *f* admet un limite infinie en *a* (resp. à gauche, à droite), on dit que la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction *f* admet en *a* (resp. à gauche de *a*, à droite de *a*) une asymptote verticale d'équation $x=a$.

Exemples classiques : $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{1}{x-a}=-\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{x-a}=+\infty$, $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}\dfrac{1}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{(x-a)^2}=+\infty$.

Calcul de limites

Opérations et limites

Conventions de calcul

Pour simplifier certains calculs de limites, on introduit les « nombres » $-\infty$ et $+\infty$ avec les règles de calcul suivantes :

Addition

- $+\infty+(+\infty)=+\infty$;
- $-\infty+(-\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R},\ a+(+\infty)=+\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R},\ a+(-\infty)=-\infty$;
- Opposé : $-(+\infty)=-\infty$ et $-(-\infty)=+\infty$.

→ le calcul « $+\infty-(+\infty)$ » n'est pas défini.

Multiplication

- $+\infty\times(+\infty)=+\infty$;
- $-\infty\times(-\infty)=+\infty$;
- $-\infty\times(+\infty)=+\infty\times(-\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R}^{+*},\ a\times(+\infty)=+\infty$ et $\forall a\in\mathbb{R}^{-*},\ a\times(+\infty)=-\infty$;
- $\forall a\in\mathbb{R}^{+*},\ a\times(-\infty)=-\infty$ et $\forall a\in\mathbb{R}^{-*},\ a\times(-\infty)=+\infty$;
- Inverse : $\frac{1}{+\infty}=0$ et $\frac{1}{-\infty}=0$.

→ Les calculs « $0\times(+\infty)$ » et « $0\times(-\infty)$ » ne sont pas définis. Il en découle que les calculs « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » ne le sont pas également.

→ Le calcul « $\frac{0}{0}$ » n'est pas défini. De façon plus générale, lorsque le dénominateur du rapport de deux fonctions tend vers 0, on se demandera si le signe reste constant où pas (limite de type 0^+ ou 0^-. Il n'y a aucune raison que ce soit le cas et on pourra considérer la fonction $x\mapsto\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}$ pour s'en convaincre.).

Pour simplifier certains énoncés (voir ci-après), on peut poser : $\boxed{\overline{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{-\infty;+\infty\}}$

Opérations et limites

A partir des conventions de calcul ci-dessus, on peut formellement écrire :

Soit f et g deux fonctions définies dans un voisinage de a (pas nécessairement en a), $a \in \overline{\mathbb{R}}$ et $k \in \mathbb{R}$.
Alors :

$$\lim_{x\to a}(kf)(x) = k\lim_{x\to a} f(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f\times g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \times \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

Lorsque l'on est confronté à une situation « interdite » (cf. les calculs non définis ci-dessus), on dit que l'on a affaire à une « **forme indéterminée** ».

On retiendra les quatre types fondamentaux de formes indéterminées :

« $\infty - \infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $0 \times \infty$ »

Le cas des fonctions polynômes

Soit f une fonction polynôme.
La limite en $\pm\infty$ de f est la limite correspondante du terme de plus haut degré.

Exemple : $\lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3+5x^2-1\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-3x^3\right) = -\infty$

Le cas des fonctions rationnelles

Soit f une fonction rationnelle.
La limite en $\pm\infty$ de f est la limite correspondante du rapport des termes de plus haut degré.

Exemples :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-4x+7}{5x^3-6x+11} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{5x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{5x} = \frac{2}{5}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$$
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+4x+7}{3x^3-2x+11} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{3x^3} = \lim_{x\to-\infty}\frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4+6x^3-5x+23}{3x^3-5x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x^4}{3x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{3} = -\frac{1}{3}\lim_{x\to+\infty} x = -\infty$$

Comparaison

Soit *f* et *g* deux fonctions définies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

On suppose qu'il existe un réel A tel que :

- $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_f$ et $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_g$ (resp. $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_f$ et $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_g$) ;
- Pour tout réel $x>\mathrm{A}$ (resp. $x<\mathrm{A}$), on a : $g(x)\leq f(x)$ (resp. $f(x)\leq g(x)$).

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

$$(\text{resp. } \lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty)$$

On a également le théorème suivant communément appelé « théorème des gendarmes » :

Soit *f*, *g* et *h* trois fonctions définies au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).

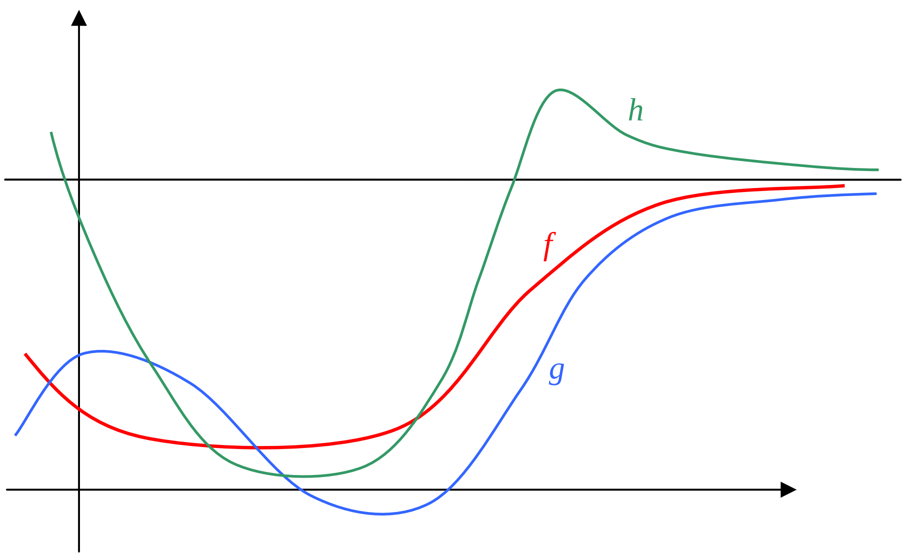
On suppose qu'il existe un réel A tel que :

- $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_f$, $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_g$ et $]\mathrm{A};+\infty[\subset\mathcal{D}_h$ (resp. $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_f$, $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_g$ et $]-\infty;\mathrm{A}[\subset\mathcal{D}_h$) ;
- Pour tout réel $x>\mathrm{A}$ (resp. $x<\mathrm{A}$), on a : $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$.

Dans ces conditions, on a :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty} h(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=l$$

$$(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty} h(x)=l \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x)=l).$$



Théorème des gendarmes.
Exemple de courbes représentatives des fonctions f (rouge), g (bleu) et h (vert).

Limite d'une fonction composée

Soit f et g deux fonctions.
Soit a, b et l trois éléments de $\overline{\mathbb{R}}$.

On suppose que :

- La fonction f est définie dans un voisinage de a et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$;
- La fonction g est définie dans un voisinage de b et $\lim\limits_{X \to b} g(X) = l$.

Alors on a :

$$\lim_{x \to a} (gof)(x) = l$$

Exemples :

→ On cherche : $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5}}$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5}}$ peut être considérée comme la composée de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5}$ et de la fonction $g : X \mapsto \sqrt{X}$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^4}{7x^4} = \dfrac{4}{7}$. On cherche alors : $\lim\limits_{X \to \frac{4}{7}} g(X)$.

On a : $\lim\limits_{X \to \frac{4}{7}} g(X) = \lim\limits_{X \to \frac{4}{7}} \sqrt{X} = \sqrt{\dfrac{4}{7}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\dfrac{4x^4 - 5x + 23}{7x^4 - 5}} = \dfrac{2}{\sqrt{7}}}$

→ On cherche : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[5\cos(2x) + 7\cos x - 3\right]$.

On peut écrire : $5\cos(2x) + 7\cos x - 3 = 5\left(2\cos^2(x) - 1\right) + 7\cos x - 3 = 10\cos^2(x) + 7\cos x - 8$.

La fonction $x \mapsto 5\cos(2x) + 7\cos x - 3$ peut alors être considérée comme la composée des fonctions : $f : x \mapsto \cos x$ et $g : X \mapsto 10X^2 + 7X - 8$.

On a alors : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$. On cherche alors : $\lim\limits_{X \to 0} g(X)$.

On a immédiatement : $\lim\limits_{X \to 0} g(X) = \lim\limits_{X \to 0} \left(10X^2 + 7X - 8\right) = -8$.

Finalement : $\boxed{\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \left[5\cos(2x) + 7\cos x - 3\right] = -8}$.