Synthèse de cours (Terminale ES)
→ La fonction logarithme népérien

Définition et premières propriétés

Définition

La fonction <u>logarithme népérien</u>, notée « ln » est la primitive définie sur $]0,+\infty[$ et s'annulant pour $x=1$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Premières propriétés (directement liées à la définition)

- La fonction logarithme népérien est définie sur $]0,+\infty[$;
- $\ln 1 = 0$;
- ln est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a : $\ln'(x) = \frac{1}{x}$;
- La fonction ln est <u>strictement croissante</u> sur $]0,+\infty[$. Il en découle :
  - Pour tout réel x de $]0,1[$, on a : $\ln x < 0$;
  - Pour tout réel x de $]1,+\infty[$, on a : $\ln x > 0$;
  - Pour tous réels x et y de $]0,+\infty[$, on a : $\ln x = \ln y$ équivaut à : $x = y$;
  - Pour tous réels x et y de $]0,+\infty[$, on a : $\ln x > \ln y$ équivaut à : $x > y$.

Propriété fondamentale : logarithme népérien d'un produit

Logarithme népérien d'un produit

Pour tous réels x et y de $]0,+\infty[$:

$$\boxed{\ln(xy) = \ln x + \ln y}$$

Conséquences de la propriété fondamentale

- Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a : $\boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x}$;
- Pour tous réels x et y de $]0,+\infty[$, on a : $\boxed{\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y}$;

- Pour tout réel x de $]0,+\infty[$ et tout entier relatif n, on a : $\boxed{\ln\left(x^n\right)=n\ln x}$;
- Pour tout réel x de $]0,+\infty[$, on a : $\boxed{\ln\left(\sqrt{x}\right)=\frac{1}{2}\ln x}$.

Etude de la fonction logarithme népérien

Continuité

$\ln$ est continue sur son ensemble de définition car elle y est dérivable (par définition).

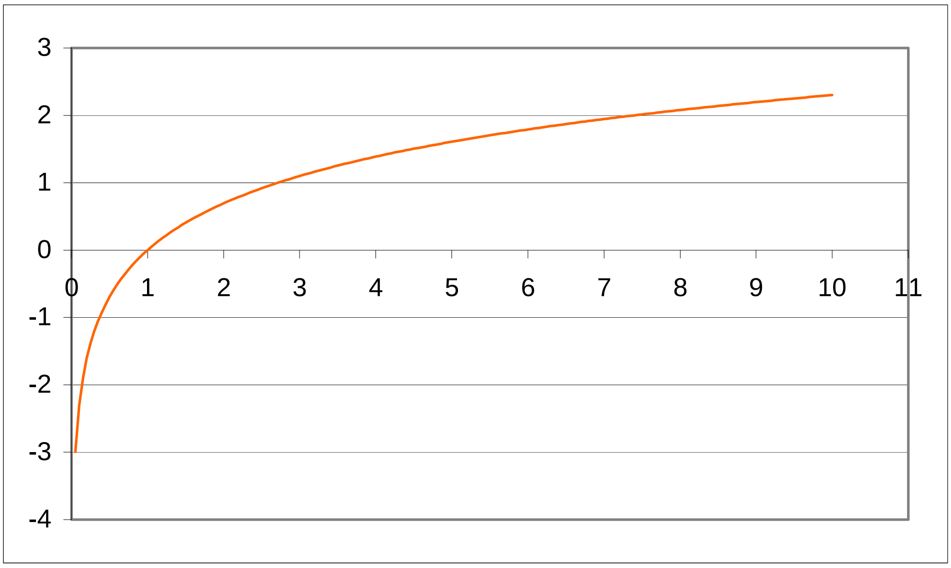
Limites aux bornes de l'ensemble de définition

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\ln x=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\end{array}}$$

Tableau de variation

x	0	1	$+\infty$
$\ln'(x)=\frac{1}{x}$	‖	$+$	
$\ln x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0	$+\infty$

Courbe représentative



Courbe représentative de la fonction logarithme népérien

Tangente

L'équation de la tangente à la courbe représentative du graphe du logarithme népérien en un point $M\left(x_0;\ln\left(x_0\right)\right)$ (avec $x_0>0$) est : $y=\ln'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\ln\left(x_0\right)=\frac{x}{x_0}+\ln\left(x_0\right)-1$.

Finalement :

$$\boxed{y=\frac{x}{x_0}+\ln\left(x_0\right)-1}$$

L'équation ln *x* = *m*

Définition

Il existe un unique réel strictement positif, noté « *e* » et appelé « base du logarithme népérien », tel que :

$$\ln e=1.$$

Remarques :

- Une valeur approchée de *e* à 10^{-3} près est : 2,718 ;
- Le point $M_e\left(e;1\right)$ est le seul point de la courbe représentative du graphe du logarithme népérien où la tangente passe par l'origine (son équation est $y=\frac{x}{e}$).

Equation ln *x* = *m*

Pour tout réel *m*, on note « e^m » (que l'on lit « *e* exposant *m* » ou « exponentielle *m* » - voir le cours sur la fonction exponentielle) l'unique solution de l'équation ln *x* = *m*.

Pour tout réel *x*, on a donc l'égalité suivante :

$$\boxed{\ln\left(e^x\right)=x}$$

Limites fondamentales

$$\boxed{\begin{array}{c}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)=0\\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x\ln x\right)=0\end{array}}$$

Composée du logarithme népérien et d'une fonction strictement positive

Dérivée de $\ln o f$

On considère un intervalle I et une fonction f telle que pour tout réel x de I on a $f(x) > 0$.
On a alors :

$$(\ln o f)'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Soit :

$$\boxed{(\ln o f)' = \frac{f'}{f}}$$

Primitive de $\frac{f'}{f}$

On considère un intervalle I et une fonction f dérivable sur I et telle que pour tout réel x de I on a $f(x) > 0$.
On a alors :

$$\boxed{\ln f \text{ est une primitive de } \frac{f'}{f} \text{ sur } I}$$