Synthèse de cours (Terminale ES)
→ Loi de probabilité discrète

Loi de probabilité discrète

Définition

On considère un ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ de n valeurs réelles.
Définir une loi de probabilité discrète sur cet ensemble c'est associer à chacune des valeurs x_i une probabilité p_i de telle sorte que l'on ait : $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

La loi de probabilité est alors parfaitement définie par la donnée du tableau suivant :

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_i	p_2	$\ldots$	p_n

Remarque : on peut considérer que l'ensemble $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ est l'ensemble des valeurs pouvant être prises par une grandeur aléatoire. On la note alors classiquement X et on l'appelle « variable aléatoire discrète ». On peut écrire : $p_i = p(X = x_i)$.

Espérance et variance d'une loi de probabilité discrète

L'espérance d'une loi de probabilité discrète est donnée par :

$$\boxed{E = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i}$$

Si l'on utilise la notion de variable aléatoire, on pourra écrire : $E = E(X)$.

La variance d'une loi de probabilité discrète est donnée par :

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E)^2 p_i}$$

Avec la notion de variable aléatoire, on constate que la variance de la loi X n'est rien d'autre que l'espérance de la variable aléatoire $(X - E(X))^2$. C'est à dire :

$$V = V(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

Autre expression de la variance

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E^2}$$

Soit encore :

$$V = E\left[\left(X - E(X)\right)^2\right] = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$$

Loi de Bernoulli – Loi binomiale

Loi de Bernoulli

Définition

On appelle « expérience de Bernoulli » toute expérience aléatoire dont l'univers compte deux issues. Traditionnellement l'une est appelée « succès » et l'autre « échec ».

Remarque : les dénomination de « succès » et d' « échec » sont historiques et ne doivent être interprétées systématiquement !

On appelle « loi de probabilité de Bernoulli » la loi de probabilité associée à une expérience de Bernoulli. A l'issue « succès » on associe la valeur 1 de probabilité p et à l'issue « échec » on associe la valeur 0 de probabilité $q = 1 - p$. On dit alors que la loi de Bernoulli est une « loi de Bernoulli de paramètre p ».

Une loi de Bernoulli est donc parfaitement définie par un tableau du type :

x_i	1	0
p_i	p	$1-p$

Espérance et variance d'une loi de Bernoulli

L'espérance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut :

$$\boxed{E = p}$$

La variance d'une loi de Bernoulli de paramètre p vaut :

$$\boxed{V = p(1-p) = pq}$$

Loi binomiale

Définition

On appelle « loi binomiale » la loi de probabilité du nombre de succès (ou d'échecs) dans l'expérience aléatoire consistant à répéter *n* expériences de Bernoulli indépendantes de même paramètre *p*. On dit alors que la loi binomiale est une « loi binomiale de paramètres *n* et *p* et on la note : $\mathcal{B}(n; p)$.

Exemple typique : *n* lancers d'une pièces de monnaie équilibrée. Chaque lancer est une expérience de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$. Le nombre de « PILE » obtenu à l'issue des *n* lancers suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$.

Espérance et variance d'une loi Binomiale

L'espérance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ vaut :

$$\boxed{E = np}$$

La variance d'une loi binomiale (résultat hors programme) $\mathcal{B}(n; p)$ vaut :

$$\boxed{V = np(1-p) = npq}$$

Remarque : on obtient donc l'espérance et la variance d'une loi binomiale $\mathcal{B}(n; p)$ à partir de l'espérance et de la variance d'une loi de Bernoulli de paramètre *p* en les multipliant respectivement par *n*.