Définitions

Notion de matrice

On appelle « matrice de dimension $n\times p$ » ou « de type $(n,\ p)$ » un tableau de nombres réels comportant *n* lignes et *p* colonnes (*n* et *p* sont deux entiers naturels non nuls).
Une matrice s'écrit entre parenthèses.
Les réels apparaissant dans la matrice sont appelés « éléments » ou « coefficients ». On les repère à l'aide de deux indices entiers : un premier indice (compris entre 1 et *n*) correspondant à la ligne de l'élément et un second (compris entre 1 et *p*) correspondant à sa colonne.
On pourra ainsi écrire :

$$A=\left(a_{ij}\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}} \text{ ou } A=\left(a_{ij}\right)$$

Si une matrice ne comporte qu'une ligne (elle est donc de dimension $1\times p$) on dit qu'il s'agit d'une « matrice ligne ».

Si une matrice ne comporte qu'une colonne (elle est donc de dimension $n\times 1$) on dit qu'il s'agit d'une « matrice colonne ».

Si une matrice *A* comporte *n* lignes et *n* colonnes, on dit qu'il s'agit d'une « matrice carrée d'ordre *n* ».
Dans ce cas, les éléments a_{ii} sont appelés « éléments diagonaux » de la matrice *A* ; ils forment la « diagonale principale » de cette matrice.

<u>Remarque importante</u> : une matrice carrée d'ordre 1 ne comporte qu'un élément et peut être confondue avec le réel correspondant.

Par exemple :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -5 & 1{,}34 & 0\\ -11 & \pi^2 & 0 & 6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 8 & 2 & 0\\ -3 & 25 & 1\\ -21 & 0 & 54\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-96 & 0 & 2{,}35 & 8 & 8\end{pmatrix} \text{ et } D=\begin{pmatrix}\pi\\ \pi^2\\ \pi^4\end{pmatrix}$$

La matrice *A* est de dimension 2×4, la matrice *B* est une matrice carrée d'ordre 3, la matrice *C* est une matrice ligne de dimension 1×5 et D est une matrice colonne de dimension 3×1.

L'élément a_{13} de la matrice *A* vaut 1,34.
Les éléments diagonaux de la matrice B sont : $b_{11}=8$, $b_{22}=25$ et $b_{33}=54$.

La matrice $E=(8{,}5)$ peut être confondue avec le réel 8,5.

Matrices particulières

Matrice nulle

On appelle « matrice nulle de type $(n,\ p)$ », ou « matrice nulle » si aucune ambiguïté n'est à craindre, la matrice de type $(n,\ p)$, notée O (ou O_n lorsque la matrice est carrée d'ordre n), dont tous les éléments sont nuls.

Par exemple :

$$O = O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrice identité

On appelle « matrice identité d'ordre n », ou « matrice identité » si aucune ambiguïté n'est à craindre, la matrice carrée d'ordre n, notée I_n ou I, dont :

- tous les éléments diagonaux sont égaux à 1.
- tous les éléments non diagonaux sont nuls.

Par exemple :

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Egalité

Soit A et B deux matrices de dimension $n \times p$.
Les matrices A et B sont dites « égales » si, et seulement si, pour tout couple d'indices $(i,\ j)$ (i entier vérifiant $1 \le i \le n$ et j entier vérifiant $1 \le j \le p$), les éléments a_{ij} et b_{ij} sont égaux.

Remarque : en utilisant la notation $[\![1\,;\,n]\!]$ pour désigner l'ensemble des entiers compris entre 1 et n, il vient :

$$A = B \Leftrightarrow \forall i \in [\![1\,;\,n]\!],\ \forall j \in [\![1\,;\,p]\!],\ a_{ij} = b_{ij}$$

Opérations

Addition

Soit A et B deux matrices de même dimension $n \times p$.
On appelle « matrice somme » des matrice A et B la matrice $C = \left(c_{ij}\right)$ de dimension $n \times p$ obtenue en additionnant entre eux les éléments correspondants des matrices A et B :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], \forall j \in [\![1\,;\,p]\!], c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Par exemple, avec $A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -5 \\ 3 & 7 & 15 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -7 & 0 & -38 \end{pmatrix}$, il vient :

$$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= \begin{pmatrix} -12 & 0 & -5 \\ 3 & 7 & 15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 \\ -7 & 0 & -38 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -12+4 & 0+5 & -5+5 \\ 3+(-7) & 7+0 & 15+(-38) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -8 & 5 & 0 \\ -4 & 7 & -23 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Multiplication par un réel

Soit A une matrice de dimension $n \times p$ et soit α un réel.
On appelle « matrice produit » de la matrice A par le réel α, la matrice $\alpha A = B = \left(b_{ij}\right)$ de dimension $n \times p$ obtenue en multipliant chaque élément de la matrice A par le réel α :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!], b_{ij} = \alpha \times a_{ij}$$

Par exemple, avec $A = \begin{pmatrix} -12 & 0 & -5 \\ 3 & 7 & 15 \end{pmatrix}$ et $k = 3$, il vient :

$$3A = \begin{pmatrix} 3\times(-12) & 3\times 0 & 3\times(-5) \\ 3\times 3 & 3\times 7 & 3\times 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & 0 & -15 \\ 9 & 21 & 45 \end{pmatrix}$$

Multiplication

Un calcul fondamental

Soit L une matrice ligne de dimension $1\times n$ et C une matrice colonne de dimension $n\times 1$.
On appelle « matrice produit de L par C » la matrice LC de dimension 1×1 définie par :

$$LC = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} = \left(l_{11}\times c_{11} + l_{12}\times c_{21} + \cdots + l_{1n}\times c_{n1} \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} l_{1k}\times c_{k1} \right)$$

La matrice ligne est ainsi « balayée » de la gauche vers la droite et la matrice colonne de haut en bas.

Par exemple :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} = 2\times 11 + (-3)\times 6 + 7\times(-5) = 22 - 18 - 35 = -31$$

On peut classiquement poser le calcul comme suit :

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ -5 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 2 & -3 & 7 \end{pmatrix} & \left(2\times 11 + (-3)\times 6 + 7\times(-5) \right) \end{array}$$

Définition

Soit A une matrice de dimension $n\times p$ et B une matrice de dimension $p\times q$.
On appelle « matrice produit de A par B » la matrice $C = AB$ de dimension $n\times q$ telle que pour tout couple d'indices $(i,\ j)$ (i entier compris entre 1 et n et j entier compris entre 1 et q), l'élément c_{ij} est égal au produit, au sens du calcul fondamental ci-dessus, de la matrice ligne correspondant à la $i$ème ligne de A par la matrice colonne correspondant à la $j$ème colonne de B :

$$\forall i \in [\![1\,;n]\!],\ \forall j \in [\![1\,;q]\!],\ c_{ij} = a_{i1}\times b_{1j} + a_{i2}\times b_{2j} + \cdots + a_{in}\times b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\times b_{kj}$$

On note que **le produit ne peut être effectué que si le nombre de colonnes de la première matrice est égal au nombre de lignes de la seconde**.

Formellement, en adoptant la disposition classique :

$$\begin{array}{cc}
 & \overbrace{\begin{pmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1q} \\
b_{21} & b_{22} & & \vdots & & b_{2q} \\
\vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
b_{k1} & \cdots & \cdots & \boxed{b_{kj}} & \cdots & b_{kq} \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
b_{p1} & b_{p2} & \cdots & \boxed{b_{pj}} & \cdots & b_{pq}
\end{pmatrix}}^{B \text{ de dimension } p\times q} \\
\underbrace{\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & \cdots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & & \vdots & & a_{2p} \\
\vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\boxed{a_{i1}} & \cdots & \cdots & \boxed{a_{ik}} & \cdots & \boxed{a_{ip}} \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} & \cdots & a_{np}
\end{pmatrix}}_{A \text{ de dimension } n\times p} &
\underbrace{\begin{pmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1k} & \cdots & c_{1q} \\
c_{21} & c_{22} & & \vdots & & c_{2q} \\
\vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
c_{i1} & \cdots & \cdots & \boxed{c_{ij}} & \cdots & c_{iq} \\
\vdots & & & \vdots & \ddots & \vdots \\
c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nk} & \cdots & c_{nq}
\end{pmatrix}}_{C=AB \text{ de dimension } n\times q}
\end{array}$$

Par exemple, avec $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, il vient :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{pmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} &
\begin{pmatrix}
2\times 0+0\times(-5)+(-5)\times 2 & 2\times(-2)+0\times 1+(-5)\times 1 & 2\times(-7)+0\times 3+(-5)\times(-1) \\
(-1)\times 0+3\times(-5)+(-2)\times 2 & (-1)\times(-2)+3\times 1+(-2)\times 1 & (-1)\times(-7)+3\times 3+(-2)\times(-1)
\end{pmatrix}
\end{array}$$

D'où :

$$A\times B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & -2 & -7 \\ -5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -10 & -9 & -9 \\ -19 & 3 & 18 \end{pmatrix}=C$$

Remarques :

❶ Les contraintes sur les dimensions des deux matrices font que pour deux matrices A et B quelconques, le produit $A\times B$ n'existe pas nécessairement (le nombre de colonnes de la première matrice doit être égal au nombre de lignes de la seconde).

❷ Le fait que le produit $A\times B$ existe ne garantit pas que le produit $B\times A$ existe ! En fait, ces deux produit existent si, et seulement si, les dimensions des matrices sont respectivement $n\times p$ et $p\times n$.

❸ Si les dimensions des matrices A et B sont $n\times p$ et $p\times n$ avec $n\neq p$ alors la matrice $A\times B$ est une matrice carrée d'ordre n tandis que la matrice $B\times A$ est une matrice carrée d'ordre p. Elles ne peuvent donc être égales !

❹ Même lorsque A et B sont toutes deux des matrices carrées d'ordre n, les matrices $A\times B$ et $B\times A$ n'ont aucune raison, à priori, d'être égales !

Les remarques précédentes doivent vous faire prendre conscience que le produit matriciel est une opération singulièrement différente du produit des réels …

Quelques propriétés

Lorsque les opérations sont possibles, on a :

- $(A\times B)\times C = A\times(B\times C)$;
- $A\times(B+C) = A\times B + A\times C$;
- $(A+B)\times C = A\times C + B\times C$.

Puissance d'une matrice carrée

Soit A une matrice carrée d'ordre n et soit n un entier naturel.
On définit « la puissance $n$ième de la matrice A » comme suit :

$$A^0 = I_n$$

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ A^n = \underbrace{A\times A\times A\times\cdots\times A}_{\substack{\text{La matrice } A \text{ apparaît} \\ n \text{ fois dans le produit.}}}$$

Remarque :

❶ Toute puissance de la matrice I_n est égale à la matrice I_n.

❷ Toute puissance d'exposant non nul de la matrice O_n est égale à la matrice O_n.

Matrice de transition

Définition

On appelle « matrice de transition » toute matrice carrée T telle que :

- Tous les éléments de T appartiennent à l'intervalle $[0\,;1]$.
- Pour toute ligne de T, la somme des éléments de la ligne est égale à 1.

Par exemple :

$$T=\begin{pmatrix}0,5 & 0,15 & 0,35\\ 0,2 & 0,7 & 0,1\\ 0,74 & 0,08 & 0,18\end{pmatrix}\qquad \begin{array}{r}0,5+0,15+0,35=1\\ 0,2+0,7+0,1=1\\ 0,74+0,08+0,18=1\end{array}$$

Les matrices de transition interviennent dans des situations modélisées à l'aide de graphes probabilistes. L'élément t_{ij} de la matrice de transition T est égal à la probabilité de passer de l'état S_i à l'état S_j (en d'autres termes, il s'agit du poids de l'arête orientée $\left(S_i,S_j\right)$ du graphe probabiliste).

Etat stable d'une matrice de transition

Soit T une matrice de transition d'ordre n.
Soit M une matrice ligne de dimension $1\times n$.
On dit que M est « un état stable de T » si M vérifie :

- La somme des éléments de M est égale à 1.
- $M\times T=M$.

Théorème

Soit T une matrice de transition d'ordre 2.

Si T ne comporte pas d'élément nul, alors T admet un état stable unique qui est la solution de l'équation matricielle :

$$X\times T=X$$