Synthèse de cours (Terminale ES)

→ Primitives

Primitives d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

On a dira que la fonction *F*, définie sur I, est « une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle I » si on a :

$$\forall x \in \mathrm{I}\ , F'(x) = f(x)$$

Propriété fondamentale

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

Si *f* admet une primitive *F* sur I **alors** *f* admet une infinité de primitives sur I et elles sont de la forme :

$$F + k$$

Où *k* est une constante réelle quelconque.

En d'autres termes, toute primitive *G* de la fonction *f* sur l'intervalle I est définie par :

$$\forall x \in \mathrm{I}\ , G(x) = F(x) + k$$

Une condition suffisante d'existence de primitives

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

Si *f* est continue sur I **alors** *f* admet des primitives sur I.

Primitive prenant une valeur particulière en un point

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.
Soit x_0 un élément de I et y_0 un réel.

Si *f* admet des primitives sur I **alors** il en existe une seule, *F*, telle que : $F(x_0) = y_0$.

Calcul de primitives

Propriétés (linéarité)

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I et soit α un réel.

- **Si** F est une primitive de f sur I **alors** αF est une primitive de αf sur I ;
- **Si** F et G sont des primitives respectivement de f et g sur I **alors** $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.

Fonctions usuelles

f	F	Intervalle I (maximal)
$x \mapsto k$ ($k \in \mathbb{R}$)	$x \mapsto kx$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$x \mapsto \frac{1}{3}x^3$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$)	$x \mapsto \frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ (si $n \geq 0$) $\mathbb{R}^{-*}$ ou $\mathbb{R}^{+*}$ (si $n < 0$)

Formulaire

Pour toute fonction u définie et dérivable sur un intervalle I (et, éventuellement, ne s'annulant pas sur I), on a :

f	F
$x \mapsto u'(x)u^n(x)$	$x \mapsto \frac{1}{n+1}\left(u(x)\right)^{n+1}$
$x \mapsto \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$x \mapsto 2\sqrt{u(x)}$

Remarques :

- La première ligne du tableau ci-dessus est valable pour n entier différent de -1 ;
- Avec $n=1$ et $n=-2$, on retrouve deux formules « classiques » ;
- On trouvera d'autres formules incluant les fonctions logarithme népérien et exponentielle dans le formulaire de primitives pour la terminale ES.