Synthèse de cours PanaMaths (Terminale S)
→ Racine *n*ième

Définition propriété

Soit a un réel positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Il existe un unique réel positif, noté « $\sqrt[n]{a}$ », qui, élevé à la puissance n, donne a. On l'appelle « la racine *n*ième de a ».

Remarques :

- Pour $n = 2$, on retrouve la définition classique (celle du collège !) de la racine carrée ;
- Pour tout entier n supérieur ou égale à 2, on a :

$$\sqrt[n]{0} = 0 \text{ et } \sqrt[n]{1} = 1$$

Propriété

Soit a un réel positif et n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

En posant, par convention : $0^{\frac{1}{n}} = 0$, on étend cette propriété à $\mathbb{R}_+$.

La fonction racine *n*ième

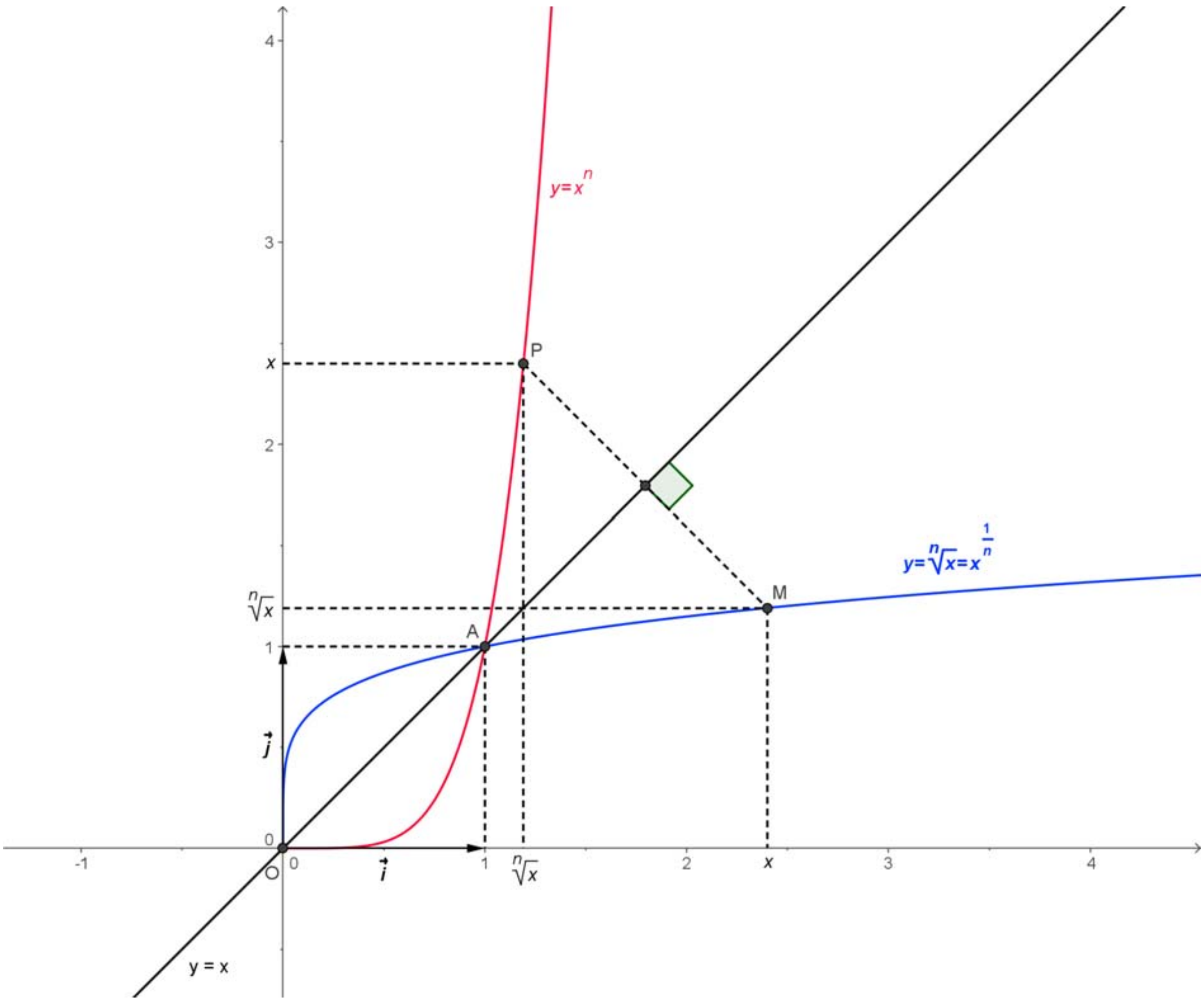
Avec la convention précédente, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n : x \mapsto f_n(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ e^{\frac{\ln x}{n}} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

On a :

- $\lim_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$;
- La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}_+$;
- La fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$;
- La fonction f_n est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_n(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$;
- La courbe représentative de la fonction f_n admet une demi-tangente verticale à l'origine.

De la définition de la racine *n*ième, on tire également que dans un repère orthonormal les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^n$ et f_n sont symétriques par rapport à la première bissectrice (cf. la figure ci-dessous).



Complément

Définition

Soit a un réel <u>négatif</u> et n un entier naturel <u>impair</u> supérieur ou égal à 3.

Il existe un unique réel négatif, noté « $\sqrt[n]{a}$ », qui, élevé à la puissance n, donne a. On l'appelle « la racine $n$ième de a ».

Remarque :

Cette extension de la définition fournie au début de ce document découle du fait que l'équation $a = x^n$ admet, lorsque n est impair, une solution unique pour tout a réel (c'est encore le théorème des valeurs intermédiaires qui nous permet de conclure de la sorte).