Synthèse de cours PanaMaths (CPGE)
→ Séries de Fourier

Préambule

Pour des soucis évidents de clarté, la lettre « *i* » désignera dans ce document le complexe vérifiant $i^2+1=0$.

Le cadre de ce chapitre est l'espace vectoriel $\mathcal{CM}_{2\pi}$ sur le corps $\mathbb{C}$ des fonctions complexes de la variable réelle, $2\pi-$périodiques et continues par morceaux.

On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace vectoriel sur le corps $\mathbb{C}$ des fonctions complexes de la variable réelle, $2\pi-$périodiques et continues. On a bien sûr : $\boxed{\mathcal{C}_{2\pi}\subset\mathcal{CM}_{2\pi}}$.

Coefficients de Fourier

Notations et rappels

Pour tout entier *n*, on note c_n, s_n et e_n les fonctions de la variable réelle définies par :

$$c_n : t\mapsto c_n(t)=\cos(nt)$$
$$s_n : t\mapsto s_n(t)=\sin(nt)$$
$$e_n : t\mapsto e_n(t)=e^{\mathrm{int}}$$

Remarque : $\forall t\in\mathbb{R},\ e^{\mathrm{int}}=\cos(nt)+i(\sin nt)=c_n(t)+is_n(t)$. Soit : $\boxed{e_n=c_n+is_n}$. Par ailleurs, s_0 est la fonction nulle.

On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble $\mathrm{Vect}\left((e_k)_{-n\le k\le n}\right)$. C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ de dimension $2n+1$.

Remarque : $\boxed{\mathcal{P}_n=\mathrm{Vect}\left((e_k)_{-n\le k\le n}\right)=\mathrm{Vect}\left(c_0,c_1,\dots,c_n,s_1,s_2,\dots,s_n\right)}$.

On note : $\boxed{\mathcal{P}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathcal{P}_n=\mathrm{Vect}\left((e_k)_{k\in\mathbb{Z}}\right)}$.

Une fonction *f* définie sur le segment $[a,b]$ ($a<b$) de $\mathbb{R}$ est dite « $\mathcal{C}^k$ par morceaux » s'il existe une famille finie strictement croissante $a=a_0<a_1<a_2<\dots<a_n=b$ telle que pour tout entier *j* dans $[\![0\,;n-1]\!]$ la restriction de *f* à $]a_j,a_{j+1}[$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $[a_j,a_{j+1}]$.

Une fonction *f* définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ est dite « $\mathcal{C}^k$ par morceaux » si elle est $\mathcal{C}^k$ par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Polynômes trigonométriques

On appelle « polynôme trigonométrique » tout élément de l'ensemble $\mathcal{P}$.
L'ensemble $\mathcal{P}$ est appelé « espace des polynômes trigonométriques ».

Un polynôme trigonométrique *P* est donc de la forme :

$$P = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k e_k = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left(c_k + i s_k\right) = \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k \left(c_k + i s_k\right) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k + \alpha_{-k}\right) c_k + i \sum_{k=1}^{n} \left(\alpha_k - \alpha_{-k}\right) s_k$$

Coefficients de Fourier

Définition

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. Pour tout entier *n*, on appelle « coefficient de Fourier de *f* d'indice *n* » le complexe $C_n(f)$ défini par :

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-\text{int}} dt$$

Les C_n sont appelés « coefficients de Fourier de la fonction *f* ».

On note $\hat{f}$ la suite des coefficients de Fourier de *f* : $\left(C_n(f)\right)_{n\in\mathbb{Z}}$, c'est-à-dire l'application :

$$\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$$
$$n \mapsto C_n(f)$$

Remarques :

- La fonction *f* étant $2\pi-$périodique, le calcul peut être mené sur tout intervalle de longueur 2π ;
- On a : $C_0(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt$. Il s'agit donc de la valeur moyenne de la fonction *f* sur une période.

Propriétés

Dans les propriétés ci-dessous, les fonctions considérées sont, sauf mention contraire, des éléments de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

- L'application $f \mapsto \hat{f}$ est linéaire :

$$\forall (\alpha,\beta)^2 \in \mathbb{C}^2,\ \widehat{\alpha f + \beta g} = \alpha \hat{f} + \beta \hat{g}$$

  C'est-à-dire :

$$\forall (\alpha,\beta)^2 \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ c_n(\alpha f + \beta g) = \alpha c_n(f) + \beta c_n(g)$$

- $\forall n \in \mathbb{Z},\ \overline{C_n(f)} = C_{-n}(\overline{f})$;
- Si f est une fonction paire alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ C_{-n}(f) = C_n(f)$;

  Si f est une fonction impaire alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ C_{-n}(f) = -C_n(f)$.
- La suite $(C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ est bornée : $\forall n \in \mathbb{Z},\ |C_n(f)| \leq \sup_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.
- Si f est $2\pi-$périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ C_n(f') = inC_n(f)$$

  Plus généralement : si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ et de classe $\mathcal{C}^k$ par morceaux alors :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ C_n\left(f^{(k)}\right) = (in)^k C_n(f)$$

Coefficients trigonométriques

Définition

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle « coefficients trigonométriques de f » les complexes, définis par $(n \in \mathbb{N})$:

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt \text{ et } b_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Remarque : on a $b_0(f) = 0$. Ainsi, on peut définir les b_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Relations entre les coefficients de Fourier et les coefficients trigonométriques

Pour tout entier naturel n, on a :

$$a_n(f) = C_n(f) + C_{-n}(f) \text{ et } b_n(f) = i\left[C_n(f) - C_{-n}(f)\right]$$

$$C_n(f) = \frac{1}{2}\left[a_n(f) - ib_n(f)\right] \text{ et } C_{-n}(f) = \frac{1}{2}\left[a_n(f) + ib_n(f)\right]$$

Remarque :

- $C_0(f) = \dfrac{a_0(f)}{2}$
- $\left|C_n(f)\right|^2 + \left|C_{-n}(f)\right|^2 = \dfrac{1}{2}\left(\left|a_n(f)\right|^2 + \left|b_n(f)\right|^2\right)$

Propriétés

Dans les propriétés ci-dessous, les fonctions considérées sont, sauf mention contraire, des éléments de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

- Si f est paire alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ b_n(f) = 0$.
  Si f est impaire alors $\forall n \in \mathbb{Z},\ a_n(f) = 0$.
- Si f est $2\pi-$périodique, continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n(f') = nb_n(f) \text{ et } b_n(f') = -na_n(f)$$

Séries de Fourier

Définition

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle « série de Fourier de *f* » la série de fonctions :

$$\sum C_n(f)e_n = \frac{a_0(f)}{2} + \sum \{a_n(f)c_n + b_n(f)s_n\}$$

ATTENTION ! La série du membre de gauche sous-entend une indexation dans $\mathbb{Z}$ tandis que pour celle de droite l'indexation se fait dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi, la somme partielle $S_n(f)$ sera définie pour tout *t* réel par :

$$\begin{aligned}(S_n(f))(x) &= \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)e_k(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\{a_k(f)c_k(x) + b_k(f)s_k(x)\} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} C_k(f)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}\{a_k(f)\cos(kx) + b_k(f)\sin(kx)\}\end{aligned}$$

Si la série de Fourier de la fonction *f* converge simplement vers la fonction *f* (c'est-à-dire si la suite $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction *f*) alors on dit que « la fonction *f* est développable en série de Fourier ».

Dans la partie suivante nous donnons des résultats fondamentaux relatifs à la série de Fourier d'une fonction d'un certain espace, résultats qui seront étendus aux fonctions $2\pi-$périodiques et continues par morceaux.

ATTENTION !

La série de Fourier associée à *f* ne converge pas nécessairement pour tout *x*. En outre, si, pour un réel *x* donné, $\lim_{n\to+\infty}\left[(S_n(f))(x)\right]$ existe, cette limite peut être différente de $f(x)$.
Ainsi, on se demande sous quelles hypothèses la série de Fourier d'une fonction donnée *f* converge et, le cas échéant, si la fonction limite de cette série peut être la fonction *f* elle-même ou une fonction proche.

L'espace préhilbertien $\mathcal{D}_{2\pi}$

L'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$

Fonction régularisée, fonction régulière

Soit $f \in \mathcal{CM}_{2\pi}$. On appelle « fonction régularisée de *f* » la fonction f_r de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ définie par :

$$f_r(x) = \frac{f(x^-) + f(x^+)}{2}$$

où : $f(x^-) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t < x}} f(t)$ et $f(x^+) = \lim\limits_{\substack{t \to x \\ t > x}} f(t)$.

Si une fonction *f* de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ est égale à sa fonction régularisée ($f = f_r$), on dit que la fonction *f* est « régulière ».

L'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$

L'ensemble des fonctions régulières de $\mathcal{CM}_{2\pi}$ est noté $\mathcal{D}_{2\pi}$.

Remarque : $\boxed{\mathcal{C}_{2\pi} \subset \mathcal{D}_{2\pi} \subset \mathcal{CM}_{2\pi}}$.

$\mathcal{D}_{2\pi}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{CM}_{2\pi}$.

Structure d'espace préhilbertien complexe de $\mathcal{D}_{2\pi}$

L'espace $\mathcal{D}_{2\pi}$ peut être muni d'une structure d'espace préhilbertien complexe à l'aide du produit scalaire complexe suivant :

$$\forall (f,g) \in (\mathcal{D}_{2\pi})^2, (f \mid g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f}(t) g(t) \, dt$$

Rappelons que la norme associée, traditionnellement notée $\| \ \|_2$, est appelée « norme hermitienne » :

$$\forall f \in \mathcal{D}_{2\pi}, \ \|f\|_2 = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, dt}$$

Dans l'espace préhilbertien complexe $\mathcal{D}_{2\pi}$, la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormale :

$$\forall (i,j)\in\mathbb{Z}^2,\ (e_i \mid e_j)=\delta_{ij}$$

Remarque : on fera, ici encore, attention à l'indexation dans $\mathbb{Z}$.

On en déduit :

Soit *f* une fonction de $\mathcal{D}_{2\pi}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ sa série de Fourier.
On a :

$$\|S_n(f)\|_2^2=\left\|\sum_{k=-n}^{n} C_k(f)e_k\right\|_2^2=\sum_{k=-n}^{n}|C_k(f)|^2=\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}\left[|a_k(f)|^2+|b_k(f)|^2\right]$$

Pour tout élément *f* de $\mathcal{D}_{2\pi}$, on a :

$$\boxed{C_n(f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-\text{int}}dt=(f\mid e_n)}$$

Projection orthogonale sur $\mathcal{P}_n$

$\mathcal{P}_n=\text{Vect}\left((e_k)_{-n\le k\le n}\right)$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie $(2n+1)$ de $\mathcal{D}_{2\pi}$. On a donc $\mathcal{P}_n\oplus\mathcal{P}^{\perp}=\mathcal{D}_{2\pi}$ et pour tout élément *f* de $\mathcal{D}_{2\pi}$, on peut introduire le projeté orthogonal $p_n(f)$ de *f* sur $\mathcal{P}_n$.

Soit *f* une fonction de $\mathcal{D}_{2\pi}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ sa série de Fourier.
On a :

$$p_n(f)=\sum_{k=-n}^{n}(f\mid e_k)e_k=\sum_{k=-n}^{n}C_k(f)e_k=S_n(f)$$

La fonction $S_n(f)$ est ainsi, au sens de la norme $\|\ \|_2$, la meilleure approximation de la fonction *f* par un élément de $\mathcal{P}_n$ et on a (théorème de Pythagore) :

$$\|f\|_2^2=\|p_n(f)\|_2^2+\left[d(f,\mathcal{P}_n)\right]^2=\|S_n(f)\|_2^2+\left[d(f,\mathcal{P}_n)\right]^2$$

L’inégalité de Bessel

A partir de $\left\|p_n(f)\right\|_2=\left\|S_n(f)\right\|_2\leq\left\|f\right\|_2$ valable pour tout entier naturel *n*, on obtient l’inégalité de Bessel :

Soit *f* une fonction de $\mathscr{D}_{2\pi}$ et $\left(S_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sa série de Fourier.
On a :

$$\sum_{k=-n}^{n}\left|C_k(f)\right|^2=\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}\left[\left|a_k(f)\right|^2+\left|b_k(f)\right|^2\right]\leq\left\|f\right\|_2^2$$

On en tire :

- La suite $\left(\sum_{k=-n}^{n}\left|C_k(f)\right|^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
- $\lim_{n\to+\infty}C_n(f)=\lim_{n\to+\infty}C_{-n}(f)=0$.
- Les séries $\sum\left|a_n(f)\right|^2$ et $\sum\left|b_n(f)\right|^2$ convergent.
- $\lim_{n\to+\infty}a_n(f)=\lim_{n\to+\infty}b_n(f)=0$.

Convergence en moyenne quadratique

Le théorème de Parseval

Soit *f* une fonction de $\mathscr{D}_{2\pi}$ et $\left(S_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sa série de Fourier.
On a :

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|f-S_n(f)\right\|_2=0$$

On dit que « $\left(S_n(f)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers *f* ».

Le théorème de Pythagore nous donne, pour tout entier naturel *n* :

$$\|f\|_2 = \|f - S_n(f)\|_2 + \|S_n(f)\|_2$$

On passe à la limite et le théorème de Parseval nous donne alors l'égalité du même nom :

L'égalité de Parseval

Soit *f* une fonction de $\mathcal{D}_{2\pi}$ et $(S_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ sa série de Fourier.
On a :

$$\|f\|_2^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n(f)|^2 = \left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n(f)|^2 + |b_n(f)|^2\right]$$

On a alors le corollaire fondamental suivant :

L'application :

$$\mathcal{D}_{2\pi} \to \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$$
$$f \mapsto \hat{f} = (C_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$$

est injective.

En d'autres termes, deux fonctions de $\mathcal{D}_{2\pi}$ ayant les mêmes coefficients de Fourier sont égales.

Extension à l'espace $\mathcal{CM}_{2\pi}$

Les résultats ci-dessus (dans la partie « L'espace préhilbertien $\mathcal{D}_{2\pi}$ ») restent valables dans l'espace $\mathcal{CM}_{2\pi}$ sauf le dernier. Ainsi, deux fonctions $2\pi-$périodiques et continues par morceaux peuvent avoir les mêmes coefficients de Fourier sans être égales.

Il convient désormais de préciser la convergence et la fonction limite éventuelles de la série de Fourier d'une fonction $2\pi-$périodique et continue par morceaux.

Convergence des séries de Fourier

Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux

Soit f une fonction réelle de la variable réelle définie sur un segment $[a\,;b]$ ($a<b$).
On dit que « f est de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $[a\,;b]$ » s'il existe une subdivision $(x_k)_{k\in[\![0\,;\,n]\!]}$ du segment $[a\,;b]$ telle que pour tout k dans $[\![0\,;n-1]\!]$ la restriction de f à l'intervalle $]x_k\,;x_{k+1}[$ soit prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[x_k\,;x_{k+1}]$.

Un théorème de convergence simple (théorème de Dirichlet)

Si f est une fonction $2\pi-$périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux alors la série de Fourier de f converge *simplement* vers la fonction régularisée f_r de la fonction f :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\right]=\boxed{f_r(x)}$$

Un théorème de convergence normale

Si f est une fonction *continue*, $2\pi-$périodique et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux alors la série de Fourier de f converge *normalement* vers la fonction f :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{n=1}^{+\infty}\left[a_n(f)\cos(nx)+b_n(f)\sin(nx)\right]=\boxed{f(x)}$$

Cas des fonctions T-périodiques

On note :

- $\mathscr{CM}_{\mathrm{T}}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{T}-$périodiques et continues par morceaux.
- $\mathscr{D}_{\mathrm{T}}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{T}-$périodiques, continues par morceaux et régulières.
- $\mathscr{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{T}-$périodiques et continues.

On a :

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathrm{T}-$périodique si, et seulement si, il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ et $2\pi-$périodique telle que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=g\left(\frac{2\pi}{T}x\right)$.

On va ainsi retrouver dans les espaces mentionnés ci-dessus, les définitions et propriétés présentées dans les espaces $\mathcal{C}_{2\pi}$, $\mathcal{D}_{2\pi}$ et $\mathcal{CM}_{2\pi}$ à condition d'effectuer les transformations formelles suivantes :

- Pour les fonctions c_n, s_n et e_n les variables « x » et « t » doivent être remplacées par « $\frac{2\pi}{\mathrm{T}}x$ » et « $\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t$ » respectivement.
- La période « 2π » doit être remplacée par « T ».

On obtient ainsi :

- Le produit scalaire dans $\mathcal{D}_{\mathrm{T}}$

$$\forall (f,g)\in(\mathcal{D}_{\mathrm{T}})^2,(f\mid g)=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}\overline{f}(t)g(t)dt$$

- Le coefficient de Fourier : $C_n(f)$

$$C_n(f)=\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}f(t)e^{-\mathrm{i}n\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t}dt$$

- Les coefficients trigonométriques : $a_n(f)$ et $b_n(f)$

$$a_n(f)=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}f(t)\cos\left(n\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t\right)dt \text{ et } b_n(f)=\frac{2}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}f(t)\sin\left(n\frac{2\pi}{\mathrm{T}}t\right)dt$$

- La somme partielle

$$\begin{aligned}(S_n(f))(x)&=\sum_{k=-n}^{n}C_k(f)e_k(x)=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\{a_k(f)c_k(x)+b_k(f)s_k(x)\}\\&=\sum_{k=-n}^{n}C_k(f)e^{ik\frac{2\pi}{\mathrm{T}}x}=\frac{a_0(f)}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left\{a_k(f)\cos\left(k\frac{2\pi}{\mathrm{T}}x\right)+b_k(f)\sin\left(k\frac{2\pi}{\mathrm{T}}x\right)\right\}\end{aligned}$$

- La norme $\|\ \|_2$ de la fonction f : $\|f\|_2$

$$\forall f\in\mathcal{D}_{\mathrm{T}},\|f\|_2=\sqrt{\frac{1}{\mathrm{T}}\int_0^{\mathrm{T}}|f(t)|^2dt}$$

- L'inégalité de Bessel et l'égalité de Parseval

$$\sum_{k=-n}^{n}|C_k(f)|^2=\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2+\sum_{k=1}^{n}\left[|a_k(f)|^2+|b_k(f)|^2\right]\le\|f\|_2^2$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|C_n(f)|^2=\left|\frac{a_0(f)}{2}\right|^2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n(f)|^2+|b_n(f)|^2\right]=\|f\|_2^2$$