Synthèse de cours PanaMaths (TS)
→ Suites numériques

Dans ce chapitre, le terme « suite » désigne une suite numérique (c'est-à-dire, dans le cadre du programme de Terminale S, une suite de réels). Une telle suite sera classiquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (u_n) (notation retenue dans ce document) ou, plus simplement u.

Définitions

Suite (strictement) croissante, décroissante, monotone

On dira que « la suite (u_n) est <u>croissante</u> (respectivement <u>strictement croissante</u>, <u>décroissante</u>, <u>strictement décroissante</u>) » si, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

(respectivement $u_n < u_{n+1}$, $u_n \geq u_{n+1}$, $u_n > u_{n+1}$)

On dira que « la suite (u_n) est <u>monotone</u> (respectivement <u>strictement monotone</u>) » si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

Suite majorée, minorée, bornée

On dira que « la suite (u_n) est <u>majorée</u> (respectivement <u>minorée</u>) » s'il existe un réel M (respectivement m) tel que pour tout entier naturel n on a :

$$u_n \leq M$$

(respectivement $u_n \geq m$)

On dit alors que « le réel M (respectivement m) est <u>un</u> majorant (respectivement <u>un</u> minorant) de la suite (u_n) ».

On dira que « la suite (u_n) est <u>bornée</u> » si elle est majorée <u>et</u> minorée.

Limite

Limite finie

On dira que « la suite (u_n) admet une limite l ($l \in \mathbb{R}$) » si, pour tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$), il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n \in]l-\varepsilon; l+\varepsilon[$. On écrit alors :

$$\lim_{x \to +\infty} u_n = l$$

On dit alors que « la suite (u_n) converge vers l » (ou « tend vers l »).

Limite infinie

On dira que « la suite (u_n) admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite » si, pour tout réel A, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n > A$ (resp. $u_n < A$). On écrit alors :

$$\lim_{x \to +\infty} u_n = +\infty \text{ (resp. } -\infty\text{)}$$

Interprétation de la définition de $\lim_{x \to +\infty} u_n = +\infty$: pour tout réel (sous-entendu arbitrairement grand), il existe un rang (N) au-delà duquel <u>tous les termes de la suite</u> sont supérieurs au réel considéré (de fait, une telle suite ne sera pas majorée !). Attention ! Ce qui précède n'implique en rien que la suite soit croissante ! On pourra par exemple considérer, pour s'en convaincre, la suite (u_n) définie par : $u_n = 2n + 5 - 7\sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$.

Nature d'une suite

Si la suite (u_n) tend vers une limite finie l, on dit qu'elle <u>converge</u>.
Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou n'admet pas de limite, on dit qu'elle <u>diverge</u>.

Dire qu'une suite est convergente ou divergente, c'est préciser la « <u>nature</u> » de la suite considérée.

Calcul de limites

Opérations et limites

Conventions de calcul

Pour simplifier certains calculs de limites, on introduit les « nombres » $-\infty$ et $+\infty$ avec les règles de calcul suivantes :

Addition

- $+\infty + (+\infty) = +\infty$;
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R},\ a + (+\infty) = +\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R},\ a + (-\infty) = -\infty$;
- Opposé : $-(+\infty) = -\infty$ et $-(-\infty) = +\infty$.

→ le calcul « $+\infty - (+\infty)$ » n'est pas défini.

Multiplication

- $+\infty \times (+\infty) = +\infty$;
- $-\infty \times (-\infty) = +\infty$;
- $-\infty \times (+\infty) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ a \times (+\infty) = +\infty$ et $\forall a \in \mathbb{R}^{-*},\ a \times (+\infty) = -\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ a \times (-\infty) = -\infty$ et $\forall a \in \mathbb{R}^{-*},\ a \times (-\infty) = +\infty$;
- Inverse : $\dfrac{1}{+\infty} = 0$ et $\dfrac{1}{-\infty} = 0$.

→ Les calculs « $0 \times (+\infty)$ » et « $0 \times (-\infty)$ » ne sont pas définis. Il en découle que les calculs « $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » ne le sont pas également.

→ Le calcul « $\dfrac{0}{0}$ » n'est pas défini. De façon plus générale, lorsque le dénominateur du rapport de deux suites tend vers 0, on se demandera si le signe reste constant où pas (limite de type 0^+ ou 0^-).

Pour simplifier certains énoncés (voir ci-après), on peut poser : $\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}}$

Opérations et limites

A partir des conventions de calcul ci-dessus, on peut formellement écrire :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites et k un réel.

$$\lim_{n\to+\infty}(ku_n)=k\lim_{n\to+\infty}u_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n+\lim_{n\to+\infty}v_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_nv_n)=\lim_{n\to+\infty}u_n\times\lim_{n\to+\infty}v_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=\frac{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}{\lim\limits_{n\to+\infty}v_n}$$

Lorsque l'on est confronté à une situation « interdite » (cf. les calculs non définis ci-dessus), on dit que l'on a affaire à une « **forme indéterminée** ».

On retiendra les quatre types fondamentaux de formes indéterminées :

« $\infty-\infty$ », « $\dfrac{0}{0}$ », « $\dfrac{\infty}{\infty}$ » et « $0\times\infty$ »

Composée d'une suite et d'une fonction

Soit (u_n) une suite et f une fonction.

Si $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=l$ et $\lim\limits_{x\to l}f(x)=l'$ **alors** $\lim\limits_{n\to+\infty}f(u_n)=l'$.

Quelques théorèmes fondamentaux

Suites adjacentes

Définition

On appelle « suites adjacentes » deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
- $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Propriété

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ **alors** pour tout entier naturel n : $u_n \leq v_n$.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes **alors** (u_n) et (v_n) convergent et admettent la même limite.

Monotonie et nature d'une suite

Théorème

Soit (u_n) une suite croissante (respectivement décroissante).

- **Si** (u_n) est majorée (respectivement minorée) **alors** (u_n) converge ;
- **Si** (u_n) n'est pas majorée (respectivement n'est pas minorée) **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Théorème

Soit (u_n) une suite définie par :

- Son premier terme u_0 ;
- Une relation, valable pour tout entier naturel *n*, de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où *f* est une fonction.

Si (u_n) converge vers *l* et **si** la fonction *f* est continue en *l* **alors** $f(l) = l$.