Synthèse de cours PanaMaths (TS)
→ Suites numériques

Dans ce chapitre, le terme « suite » désigne une suite numérique (c'est-à-dire, dans le cadre du programme de Terminale S, une suite de réels). Une telle suite sera classiquement notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (u_n) (notation retenue dans ce document) ou, plus simplement *u*.

Raisonnement par récurrence

Le cadre

On cherche à établir une propriété $\mathscr{P}$ qui dépend d'un paramètre *n*, entier naturel.

Par exemple : « Pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à 3, $n! \geq 2n$ ».
Dans cet exemple, il y a en fait une infinité d'inégalités à établir (pour $n = 3, 4, 5, 6, \ldots$).
Le raisonnement par récurrence permet de démontrer des propriétés de ce type (mais on doit garder présent à l'esprit qu'utiliser un raisonnement par récurrence n'est en rien une obligation ! Il n'est par exemple pas utile d'utiliser un tel raisonnement pour montrer que pour tout réel *x* et pour tout entier naturel pair, le réel $\sin^n(x)$ est positif !).

Structure générale du raisonnement par récurrence

On procède systématiquement en trois étapes :

Initialisation

On vérifie la propriété $\mathscr{P}$ à un certain rang initial n_0 (dans notre exemple $n_0 = 3$).
On dit alors que « $\mathscr{P}_{n_0}$ est vraie » ou que « la propriété $\mathscr{P}$ est initialisée ».

Hérédité

On suppose alors que la propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour un certain rang $N \geq n_0$ (hypothèse de récurrence) et on montre que la propriété est vraie au rang $N+1$.
On dit alors que « $\mathscr{P}_{N+1}$ est vraie » ou que « la propriété $\mathscr{P}$ est héréditaire ».

Dans notre exemple, on suppose que l'on a $N! \geq 2N$ pour un certain $N \geq 3$.
On montre alors facilement que l'on a : $(N+1)! \geq 2(N+1)$.

Conclusion

La propriété $\mathscr{P}$ est vraie pour tout entier naturel *n* supérieur ou égal à n_0.

Attention ! Cette troisième étape est souvent négligée mais elle permet effectivement de conclure rigoureusement le raisonnement et doit clairement apparaître !

Définitions

Suite (strictement) croissante, décroissante, monotone (rappels de 1ère)

On dira que « la suite (u_n) est croissante (respectivement strictement croissante, décroissante, strictement décroissante) » si, pour tout entier naturel *n*, on a :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

(respectivement $u_n < u_{n+1}$, $u_n \geq u_{n+1}$, $u_n > u_{n+1}$)

On dira que « la suite (u_n) est monotone (respectivement strictement monotone) » si elle est croissante ou décroissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

Suite majorée, minorée, bornée

On dira que « la suite (u_n) est majorée (respectivement minorée) » s'il existe un réel *M* (respectivement *m*) tel que pour tout entier naturel *n* on a :

$$u_n \leq M$$

(respectivement $u_n \geq m$)

On dit alors que « le réel *M* (respectivement *m*) est un majorant (respectivement un minorant) de la suite (u_n) ».

On dira que « la suite (u_n) est bornée » si elle est majorée et minorée.

Remarque : si une suite est majorée (respectivement minorée) alors elle admet une infinité de majorants (respectivement minorants).

Limite

Limite finie

On dira que « la suite (u_n) admet une limite l ($l \in \mathbb{R}$) » si, pour tout intervalle de la forme $]l-\varepsilon\,;l+\varepsilon[$ ($\varepsilon > 0$), il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n \in]l-\varepsilon\,;l+\varepsilon[$ (à partir du rang N, tous les termes de la suites se trouvent dans l'intervalle $]l-\varepsilon\,;l+\varepsilon[$). On écrit alors :

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = l$$

On dit alors que « la suite (u_n) converge vers l » (ou « tend vers l »).

Remarquons que l'on a l'équivalence : $u_n \in]l-\varepsilon\,;l+\varepsilon[\Leftrightarrow |u_n - l| < \varepsilon \Leftrightarrow u_n - l \in]-\varepsilon\,;+\varepsilon[$.
Il en découle que l'on a l'équivalence fondamentale : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} u_n = l \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - l) = 0}$.

Limite infinie

On dira que « la suite (u_n) admet $+\infty$ (resp. $-\infty$) comme limite » si, pour tout réel A, il existe un entier naturel N tel que pour tout entier naturel n supérieur à N, on a $u_n > A$ (resp. $u_n < A$). On écrit alors :

$$\lim_{x\to+\infty} u_n = +\infty \text{ (resp. } -\infty\text{)}$$

Interprétation de la définition de $\lim_{x\to+\infty} u_n = +\infty$: pour tout réel (sous-entendu arbitrairement grand), il existe un rang (N) au-delà duquel <u>tous les termes de la suite</u> sont supérieurs au réel considéré (de fait, une telle suite ne sera pas majorée !). Attention ! Ce qui précède n'implique en rien que la suite soit croissante ! On pourra par exemple considérer, pour s'en convaincre, la suite (u_n) définie par : $u_n = 2n + 5 - 7\sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Nature d'une suite

Si la suite (u_n) tend vers une limite finie *l*, on dit qu'elle converge.
Si la suite (u_n) tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ ou n'admet pas de limite, on dit qu'elle diverge.

Dire qu'une suite est convergente ou divergente, c'est préciser la « nature » de la suite considérée.

Exemples de suites n'admettant pas de limite : $u_n = (-1)^n$ (la suite (u_n) est bornée) et $v_n = (-1)^n \times n$ (la suite (v_n) n'est pas bornée)

Calcul de limites

Opérations et limites

Conventions de calcul

Pour simplifier certains calculs de limites, on introduit les « nombres » $-\infty$ et $+\infty$ avec les règles de calcul suivantes :

Addition

- $+\infty + (+\infty) = +\infty$;
- $-\infty + (-\infty) = -\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R},\ a + (+\infty) = +\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R},\ a + (-\infty) = -\infty$;
- Opposé : $-(+\infty) = -\infty$ et $-(-\infty) = +\infty$.

→ le calcul « $+\infty - (+\infty)$ » n'est pas défini.

Multiplication

- $+\infty \times (+\infty) = +\infty$;
- $-\infty \times (-\infty) = +\infty$;
- $-\infty \times (+\infty) = +\infty \times (-\infty) = -\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ a \times (+\infty) = +\infty$ et $\forall a \in \mathbb{R}^{-*},\ a \times (+\infty) = -\infty$;
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*},\ a \times (-\infty) = -\infty$ et $\forall a \in \mathbb{R}^{-*},\ a \times (-\infty) = +\infty$;
- Inverse : $\frac{1}{+\infty} = 0$ et $\frac{1}{-\infty} = 0$.

→ Les calculs « $0\times(+\infty)$ » et « $0\times(-\infty)$ » ne sont pas définis. Il en découle que les calculs « $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ » ne le sont pas également.

→ Le calcul « $\frac{0}{0}$ » n'est pas défini. De façon plus générale, lorsque le dénominateur du rapport de deux suites tend vers 0, on se demandera si le signe reste constant où pas (limite de type 0^+ ou 0^-).

Pour simplifier certains énoncés (voir ci-après), on peut poser : $\boxed{\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty ; +\infty\}}$

Opérations et limites

A partir des conventions de calcul ci-dessus, on peut formellement écrire :

Soit (u_n) et (v_n) deux suites et k un réel.

$$\lim_{n\to+\infty}(ku_n) = k\lim_{n\to+\infty} u_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n+v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n + \lim_{n\to+\infty} v_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n v_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n \times \lim_{n\to+\infty} v_n$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n\to+\infty} u_n}{\lim_{n\to+\infty} v_n}$$

Lorsque l'on est confronté à une situation « interdite » (cf. les calculs non définis ci-dessus), on dit que l'on a affaire à une « **forme indéterminée** ».

On retiendra les quatre types fondamentaux de formes indéterminées :

« $\infty-\infty$ », « $\frac{0}{0}$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $0\times\infty$ »

Composée d'une suite et d'une fonction

Soit (u_n) une suite et *f* une fonction.

Si $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$ et $\lim_{x \to l} f(x) = l'$ **alors** $\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = l'$.

Quelques théorèmes fondamentaux

Comparaison

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que, <u>à partir d'un certain rang</u>, on ait :

$$u_n \leq v_n$$

- **Si** $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ **alors** $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- **Si** $\lim_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ **alors** $\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème d'encadrement

Soit (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que, <u>à partir d'un certain rang</u>, on ait :

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

Si (v_n) et (w_n) sont convergentes de même limite *l* **alors** :

- La suite (u_n) est convergente.
- $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

Ce théorème est aussi classiquement appelé « théorème des gendarmes » : métaphoriquement, la suite (u_n) étant prisonnière ($v_n \leq u_n \leq w_n$) des deux gendarmes ((v_n) et (w_n)), elle va (admet pour limite) là où les deux gendarmes vont (même limite) ! ☺

Monotonie

Théorème

Soit (u_n) une suite croissante (respectivement décroissante).

- **Si** (u_n) est majorée (respectivement minorée) **alors** (u_n) converge ;
- **Si** (u_n) n'est pas majorée (respectivement n'est pas minorée) **alors** $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ (respectivement $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).

Compléments (hors programme)

Suites adjacentes

Définition

On appelle « suites adjacentes » deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant :

- (u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;
- $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Propriété

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes telles que (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$ **alors** pour tout entier naturel n : $u_n \le v_n$.

Théorème

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes **alors** (u_n) et (v_n) convergent et admettent la même limite.

Remarque : deux belles utilisations des suites récurrentes s'inscrivent assez naturellement dans le programme de mathématiques de la classe de Terminale S : le principe de dichotomie pour la recherche de solutions approchées de l'équation $f(x)=0$ et l'irrationalité de *e* (que l'on trouvera dans la rubrique « articles » du site panamaths.net).

Suites récurrentes

Théorème

Soit (u_n) une suite définie par :

- Son premier terme u_0 ;
- Une relation, valable pour tout entier naturel *n*, de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où *f* est une fonction.

Si (u_n) converge vers *l* et **si** la fonction *f* est continue en *l* **alors** $f(l)=l$.

Remarques :

- Un réel *a* vérifiant $f(a)=a$ et appelé « point fixe » de la fonction *f*.
- Si on a établi la convergence d'une suite récurrente (u_n) et si on dispose de la continuité de la fonction *f*, on pourra chercher la limite de (u_n) parmi les solutions de l'équation $f(x)=x$.