Synthèse de cours PanaMaths

→ Tribus

Dans ce document, pour tout ensemble E et toute partie A de E, nous noterons $\overline{\mathrm{A}}$ le complémentaire de A dans E.

Définitions et premières propriétés

Définitions

Soit E un ensemble.
Soit $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\mathrm{E})$.

On dit que « $\mathscr{T}$ est une tribu (ou une σ – algèbre) sur E » si $\mathscr{T}$ vérifie :

- $\varnothing \in \mathscr{T}$;
- $\forall \mathrm{A} \in \mathscr{T}, \overline{\mathrm{A}} \in \mathscr{T}$ (stabilité par complémentarité) ;
- $\forall (\mathrm{A}_n) \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathscr{T}$ (stabilité par union dénombrable).

Si $\mathscr{T}$ est une tribu sur E, alors le couple $(\mathrm{E}, \mathscr{T})$ est appelé « espace mesurable ».

Exemples :

- $\{\varnothing, \mathrm{E}\}$ et $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ sont des tribus de E, respectivement la plus petite et la plus grande au sens de l'inclusion. Pour toute tribu $\mathscr{T}$ sur E, on a donc :
$$\{\varnothing, \mathrm{E}\} \subset \mathscr{T} \subset \mathscr{P}(\mathrm{E})$$
- Si E est un ensemble non vide, alors pour toute partie A non vide de E, $\{\varnothing, \mathrm{A}, \overline{\mathrm{A}}, \mathrm{E}\}$ est une tribu sur E (il s'agit de la plus petite tribu sur E contenant A. Voir plus loin.).

Premières propriétés

Si E un ensemble et $\mathscr{T}$ une tribu sur E alors :

- $\mathrm{E} \in \mathscr{T}$;
- Pour toutes parties A et B de E dans $\mathscr{T}$, les parties $\mathrm{A} \bigcup \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \bigcap \mathrm{B}$, $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ et $\mathrm{A} \Delta \mathrm{B}$ sont des éléments de $\mathscr{T}$.
- $\forall (\mathrm{A}_n) \in \mathscr{T}^{\mathbb{N}}, \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n \in \mathscr{T}$ (stabilité par intersection dénombrable).

Rappel : la notation « $A\Delta B$ » désigne la « différence symétrique » des parties A et B à savoir : $A\,\Delta\,B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$.

Tribu et topologie

Une tribu sur un ensemble quelconque E présente la caractéristique fondamentale d'être stable par union et intersection dénombrables. Pour ce qui est de l'union, une topologie présente une stabilité plus forte puisqu'elle est stable par union quelconque. En revanche, une topologie n'est stable, en général, que par intersection finie. Ainsi, en général, une tribu n'est pas une topologie et une topologie n'est pas une tribu.

Tribu engendrée

Propriété fondamentale

Soit E un ensemble.
Si $(\mathscr{T}_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de tribus sur E **alors** $\bigcap_{i\in I}\mathscr{T}_i$ est une tribu sur E.

Définition-théorème

Le résultat précédent conduit à énoncer :

Soit E un ensemble et soit $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(E)$.
Il existe une plus petite (au sens de l'inclusion) tribu contenant $\mathscr{S}$: il s'agit de l'intersection de toutes les tribus de E contenant $\mathscr{S}$. On la note $\tau(\mathscr{S})$ et on l'appelle « tribu engendrée par $\mathscr{S}$ ».

Remarque : « τ » est la lettre grecque « tau ».

Théorème

Soit E un ensemble et soit $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(E)$ et $\mathscr{S}'\subset\mathscr{P}(E)$.
Si $\mathscr{S}\subset\mathscr{S}'$ **alors** $\tau(\mathscr{S})\subset\tau(\mathscr{S}')$.

Tribu borélienne

Définition

Soit $\left(\mathrm{E},\mathscr{U}\right)$ un espace topologique, $\mathscr{U}$ désignant l'ensemble des ouverts de cet espace.

On appelle « tribu borélienne de E » ou « tribu de Borel de E » la tribu sur E engendrée par $\mathscr{U}$. On la note $\mathscr{B}\left(\mathrm{E}\right)$ ou $\mathscr{B}_{\mathrm{E}}$. On a donc :

$$\mathscr{B}\left(\mathrm{E}\right)=\tau\left(\mathscr{U}\right)$$

Les éléments de $\mathscr{B}\left(\mathrm{E}\right)$ sont appelés « les boréliens de l'espace topologique $\left(\mathrm{E},\mathscr{U}\right)$ ».

Remarques :

- Si l'on considère une autre topologie sur E, on obtiendra, en général, une autre tribu borélienne.
- Pour $\left(\mathrm{E},\mathscr{U}\right)$ donné, la tribu borélienne de E contient en particulier :
    - Tous les ouverts de E.
    - Tous les fermés de E.
    - Toutes les intersections et unions dénombrables d'ouverts de E.

Tribu borélienne de $\mathbb{R}$

Théorème-définition

L'ensemble des réunions (quelconques) d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ est une topologie sur cet ensemble appelée « topologie usuelle de $\mathbb{R}$ ».

Théorème

Soit $\mathbb{R}$ muni de sa topologie usuelle.

La tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par l'ensemble des intervalles ouverts et bornés de $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}}=\tau\left(\left\{\left]a\,;b\right[\,/\left(a,b\right)\in\mathbb{R}^2\right\}\right)$$

Remarque : $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ est également engendrée par l'un quelconque des ensembles suivants :

- $\{[a;b[\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$, $\{]a;b]\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$ et $\{[a;b]\ /\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$;
- $\{]-\infty;a[\ /\ a\in\mathbb{R}\}$, $\{]-\infty;a]\ /\ a\in\mathbb{R}\}$, $\{]a;+\infty[\ /\ a\in\mathbb{R}\}$ et $\{[a;+\infty[\ /\ a\in\mathbb{R}\}$.

Image réciproque d'une tribu. Application mesurable

Notion d'image réciproque, rappels.

Soit E et F deux ensembles et *f* une application de E dans F.

Soit B une partie de F. On appelle « image réciproque de B par *f* », notée $f^{-1}(\mathrm{B})$, l'ensemble des éléments de E dont l'image par *f* appartient à B :

$$f^{-1}(\mathrm{B})=\{x\in\mathrm{E}\ /\ f(x)\in\mathrm{B}\}$$

Soit maintenant $\mathscr{S}$ un ensemble de parties de F (c'est-à-dire une partie de $\mathscr{P}(\mathrm{F})$, soit encore un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathrm{F}))$). On appelle « image réciproque de $\mathscr{S}$ », notée $f^{-1}(\mathscr{S})$, l'ensemble des images réciproques des éléments de $\mathscr{S}$:

$$f^{-1}(\mathscr{S})=\{f^{-1}(\mathrm{B})\ /\ \mathrm{B}\in\mathscr{S}\}$$

Théorème

Soit E et F deux ensembles et *f* une application de E dans F.

Si $\mathscr{S}$ est une tribu de F **alors** $\mathscr{T}=f^{-1}(\mathscr{S})$ est une tribu de E.

Définition

Soit $(\mathrm{E},\mathscr{T})$ et $(\mathrm{E}',\mathscr{T}')$ deux espaces mesurables et soit *f* une application de E dans E'.

On dit que « l'application *f* est $(\mathscr{T},\mathscr{T}')$ – mesurable » (ou simplement « mesurable » s'il n'y a pas d'ambiguïté) si on a :

$$f^{-1}(\mathscr{T}')\subset\mathscr{T}$$

Tribu produit

Définitions

Soit $(\mathrm{E}, \mathscr{T})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{T}')$ deux espaces mesurables.

On appelle « pavé mesurable de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}'$ » tout produit de la forme $\mathrm{A}\times\mathrm{A}'$ où $\mathrm{A}\in\mathscr{T}$ et $\mathrm{A}'\in\mathscr{T}'$.

On appelle « tribu produit de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ » (ou « produit tensoriel des tribus $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ »), notée $\mathscr{T}\otimes\mathscr{T}'$, la tribu de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}'$ engendrée par l'ensemble des pavés mesurables de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}'$:

$$\mathscr{T}\otimes\mathscr{T}' = \tau\left(\left\{\mathrm{A}\times\mathrm{A}' / \mathrm{A}\in\mathscr{T}, \mathrm{A}'\in\mathscr{T}'\right\}\right)$$

L'espace mesurable $(\mathrm{E}\times\mathrm{E}', \mathscr{T}\otimes\mathscr{T}')$ est appelé « espace mesurable produit des espaces mesurables $(\mathrm{E}, \mathscr{T})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{T}')$ ».

Remarques :

- Le produit $\mathrm{A}\times\mathrm{A}'$ ($\mathrm{A}\in\mathscr{T}$ et $\mathrm{A}'\in\mathscr{T}'$) est une partie de $\mathrm{E}\times\mathrm{E}'$. Il s'agit donc d'un élément de $\mathscr{P}(\mathrm{E}\times\mathrm{E}')$. Ainsi, on a : $\mathscr{T}\otimes\mathscr{T}'\subset\mathscr{P}(\mathrm{E}\times\mathrm{E}')$.
- Les définitions précédentes se généralisent immédiatement à une suite finie d'espaces mesurables.

Théorème

Soit E et E' deux ensembles.
Soit $\mathscr{S}\subset\mathscr{P}(\mathrm{E})$ et $\mathscr{S}'\subset\mathscr{P}(\mathrm{E}')$ tels que : $\mathrm{E}\in\mathscr{S}$ et $\mathrm{E}'\in\mathscr{S}'$.

On a :

$$\tau_{\mathrm{E}\times\mathrm{E}'}(\mathscr{S}\times\mathscr{S}') = \tau_{\mathrm{E}}(\mathscr{S})\otimes\tau_{\mathrm{E}'}(\mathscr{S}')$$

Théorème

$(\mathrm{E}, \mathscr{U})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{U}')$ deux espaces topologiques, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$ désignant respectivement les ensembles des ouverts des espaces E et E'.

On a :

- $\mathscr{B}(\mathrm{E}) \otimes \mathscr{B}(\mathrm{E}') \subset \mathscr{B}(\mathrm{E} \times \mathrm{E}')$;
- **Si** $(\mathrm{E}, \mathscr{U})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{U}')$ admettent tous les deux des bases dénombrables d'ouverts **alors** :
$$\mathscr{B}(\mathrm{E}) \otimes \mathscr{B}(\mathrm{E}') = \mathscr{B}(\mathrm{E} \times \mathrm{E}')$$

Rappel : notons que lorsque l'on considère deux espaces topologiques $(\mathrm{E}, \mathscr{U})$ et $(\mathrm{E}', \mathscr{U}')$, on peut définir sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}'$ une topologie dite « topologie produit de $\mathscr{U}$ et $\mathscr{U}'$ », notée $\mathscr{U} \otimes \mathscr{U}'$, qui est la topologie dont l'ensemble des ouverts admet pour base : $\{\mathrm{U} \times \mathrm{U}' / \mathrm{U} \in \mathscr{U}, \mathrm{U}' \in \mathscr{U}'\}$ (un tel ouvert $\mathrm{U} \times \mathrm{U}'$ étant appelé « ouvert élémentaire »).

Exemple :

$$\mathscr{B}(\mathbb{R}^2) = \mathscr{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathscr{B}(\mathbb{R})$$