Synthèse de cours PanaMaths
→ Variables aléatoires réelles à densité

Dans tout ce document, les variables aléatoires considérées sont des variables aléatoires réelles (V.A.R.).

Variable aléatoire réelle à densité

Définition

Soit X une V.A.R. de fonction de répartition *F*.

On dit que « X est une variable aléatoire réelle à densité » ou que « X est absolument continue » s'il existe une fonction *f* de la variable réelle telle que :

- La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ sauf, peut-être en un nombre fini de points.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.

On dit alors que « X est une variable aléatoire réelle de densité *f* ».

Propriété

Soit X une V.A.R. de densité *f*.

Si *g* une fonction de la variable réelle, positive, ne différant de *f* qu'en un nombre fini de points (i.e. l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} / f(x) \neq g(x)\}$ est fini) **alors** *g* est aussi une densité pour X.

On retiendra :

Si une V.A.R. X admet une densité **alors** elle en admet une infinité.

Caractérisation d'une densité

Soit *f* une fonction réelle de la variable réelle.

La fonction *f* est une densité si, et seulement si :

- La fonction *f* est continue sur $\mathbb{R}$ sauf, peut-être en un nombre fini de points.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$;
- $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Calcul de probabilités

Soit X une V.A.R. de densité *f*.

Pour tous réels *a* et *b*, on a :

- $p(\mathrm{X} = a) = 0$ (on dit que la loi de X est « diffuse ») ;
- $p(\mathrm{X} > a) = p(\mathrm{X} \geq a) = \int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$;
- $p(a < \mathrm{X} < b) = p(a < \mathrm{X} \leq b) = p(a \leq \mathrm{X} < b) = p(a \leq \mathrm{X} \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Densité et fonction de répartition

Soit X une V.A.R. de densité *f* et de fonction de répartition *F*.

- La fonction *F* est continue sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, une V.A.R. absolument continue est continue (mais la réciproque est fausse).
- En tout point *a* où *f* est continue, on a : $F'(a) = f(a)$.
  Ainsi, *F* est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

Ces résultats fondamentaux conduisent au théorème suivant, très utile dans la pratique.

Si F est une fonction réelle de la variable réelle vérifiant :

- F est croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0^+$ et $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1^-$;
- F est continue sur $\mathbb{R}$;
- F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en un nombre fini de points.

alors la fonction F est la fonction de répartition d'une V.A.R. X à densité.

Pour obtenir une densité f de la V.A.R. X, on procède alors comme suit :

- Pour tout réel x où F est dérivable : $f(x) = F'(x)$.
- Pour tout réel x éventuel où F n'est pas dérivable : on choisit n'importe quelle valeur positive pour $f(x)$.

Moments d'une variable aléatoire réelle à densité

Espérance

Définition

Soit X une V.A.R. de densité *f*.

On appelle « espérance de X », notée $\mathrm{E}(\mathrm{X})$, le réel (sous réserve d'existence de l'intégrale) :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}) = \int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\, dx$$

Remarque : rappelons que l'espérance est le moment standard d'ordre 1 de X.

Propriétés

On a les propriétés classiques de l'espérance (voir le document « Généralités dur les variables aléatoires réelles »).

Variance et écart type

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle de densité *f*.

On appelle « variance de X », notée $\mathrm{V}(\mathrm{X})$ ou $\mathrm{var}(\mathrm{X})$, le réel (sous réserve d'existence de l'intégrale) :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = E\left[\left(\mathrm{X} - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2\right] = \int_{\mathbb{R}} \left(x - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 f(x)\,dx$$

L'écart type σ_{X} de X est la racine carrée de sa variance :

$$\sigma_{\mathrm{X}} = \sqrt{\mathrm{V}(\mathrm{X})} = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} \left(x - \mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 f(x)\,dx}$$

Remarque : rappelons que la variance est le moment centré d'ordre 2 de X.

Propriétés

On a les propriétés classiques de la variance (voir le document « Généralités dur les variables aléatoires réelles »). Rappelons cependant le théorème de Koenig-Huyghens :

Si X est une variable aléatoire réelle de densité *f* admettant une variance **alors** on a :

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}) = E\left(\mathrm{X}^2\right) - \left(\mathrm{E}(\mathrm{X})\right)^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}} x\, f(x)\,dx\right)^2$$

On a aussi le théorème intéressant suivant :

Si X est une variable aléatoire réelle de densité *f* admettant une variance **alors** X admet une espérance.

Théorème de transfert

Soit X une variable aléatoire réelle de densité *f*.

Soit *g* une fonction réelle de la variable réelle, continue sauf, éventuellement, en un nombre fini de points.

Si l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$ est absolument convergente, alors la V.A.R. $\mathrm{Y} = g(\mathrm{X})$ admet une espérance $\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ et on a :

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \mathrm{E}(g(\mathrm{X})) = \int_{\mathbb{R}} g(x) f(x) dx$$