Dérivées et Primitives

Activité N°3 page 89 - Corrigé

Etude d'un cas particulier

1. La fonction coût marginal C_m est définie sur l'intervalle $[0;15]$ par :

$$C_m(x) = 3x^2 - 36x + 750$$

La fonction coût total C_T est la primitive de C_m sur l'intervalle $[0;15]$ qui vérifie $C_T(0) = 200$.

Les primitives de C_m sur l'intervalle $[0;15]$ sont de la forme :

$$F(x) = x^3 - 18x^2 + 750x + k$$

où k est une constante réelle quelconque

La condition $C_T(0) = 200$ équivaut alors à : $k = 200$.

La fonction C_T est définie sur l'intervalle $[0;15]$ par : $C_T(x) = x^3 - 18x^2 + 750x + 200$

La fonction coût moyen C_M est définie sur l'intervalle $]0;15]$ par : $C_M(x) = \dfrac{C_T(x)}{x}$.

On a donc, pour tout réel de l'intervalle $]0;15]$:

$$C_M(x) = \frac{C_T(x)}{x} = \frac{x^3 - 18x^2 + 750x + 200}{x} = x^2 - 18x + 750 + \frac{200}{x}$$

La fonction C_M est définie sur l'intervalle $]0;15]$ par : $C_M(x) = x^2 - 18x + 750 + \dfrac{200}{x}$

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0;15]$, on a :

$$C_M'(x) = 2x - 18 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^3 - 18x^2 - 200}{x^2} = \frac{2\left(x^3 - 9x^2 - 100\right)}{x^2}$$

On a facilement :

$$\left(x-10\right)\left(x^2+x+10\right)=x^3+x^2\cancel{+10x}-10x^2\cancel{-10x}-100=x^3-9x^2-100$$

On en déduit finalement :

Pour tout réel x de l'intervalle $\left]0;15\right]$: $$C_M\,'\left(x\right)=\frac{2\left(x-10\right)\left(x^2+x+10\right)}{x^2}$$

3. a. Dans un premier temps, étudions le signe de $C_M\,'$ sur $\left]0;15\right]$.

Cette fonction est rationnelle et son dénominateur est strictement positif.
Son numérateur comporte deux facteurs dépendant de la variable x.
Le facteur $x-10$:

- s'annule pour $x=10$;
- est strictement négatif pour $x\in\left]0;10\right[$;
- est strictement positif pour $x\in\left]10;15\right]$.

Pour déterminer le signe de x^2+x+10, nous pouvons calculer le discriminant associé :

$$\Delta=1-4\times1\times10=-39$$

Le discriminant étant strictement négatif, x^2+x+10 garde un signe constant qui est celui du coefficient de x^2, donc strictement positif.

On déduit de ce qui précède :

- Pour $x=10$, $C_M\,'$ s'annule ;
- Pour $x\in\left]0;10\right[$, $C_M\,'\left(x\right)<0$ et la fonction C_M est strictement décroissante ;
- Pour $x\in\left]10;15\right]$, $C_M\,'\left(x\right)>0$ et la fonction C_M est strictement croissante.

On a par ailleurs :

$$C_M\left(10\right)=10^2-18\times10+750+\frac{200}{10}=100-180+750+20=\boxed{690}$$

$$C_M\left(15\right)=15^2-18\times15+750+\frac{200}{15}=225-270+750+\frac{40}{3}\simeq\boxed{718,3}$$

Il nous reste à déterminer la limite de C_M en 0 à droite.
On a :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^2-18x+750\right)=750$$

Et :

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\frac{200}{x}=+\infty$$

D'où, finalement :

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} C_M(x) = +\infty$$

On peut alors, à partir des éléments précédents, donner le tableau de variation suivant :

x	0		10		15
$C_M\,'$		$-$	0	$+$	
C_M	$+\infty$	$\searrow$	690	$\nearrow$	$C_M(15)$

b. D'après ce qui précède, on peut affirmer que le coût moyen est minimal pour $x = 10$, c'est à dire pour 10 000 objets fabriqués.

c. On a calculé : $C_M(10) = 690$.

On a par ailleurs : $C_m(10) = 3 \times 10^2 - 36 \times 10 + 750 = 300 - 360 + 750 = 690$

On constate que l'on a : $C_M(10) = C_m(10)$. En d'autres termes, pour la valeur de la production qui minimise le coût moyen, le coût marginal est égal au coût moyen.

4. On a : $C_m(x) = 3x^2 - 36x + 750$.

   On a donc : $C_m(x) = 6x - 36 = 6(x-6)$.

   L'étude du signe est immédiate :
   - Pour $x = 6$, $C_m\,'$ s'annule ;
   - Pour $x \in \left]0;6\right[$, $C_m\,'(x) < 0$ et la fonction C_m est strictement décroissante ;
   - Pour $x \in \left]6;15\right]$, $C_m\,'(x) > 0$ et la fonction C_m est strictement croissante.

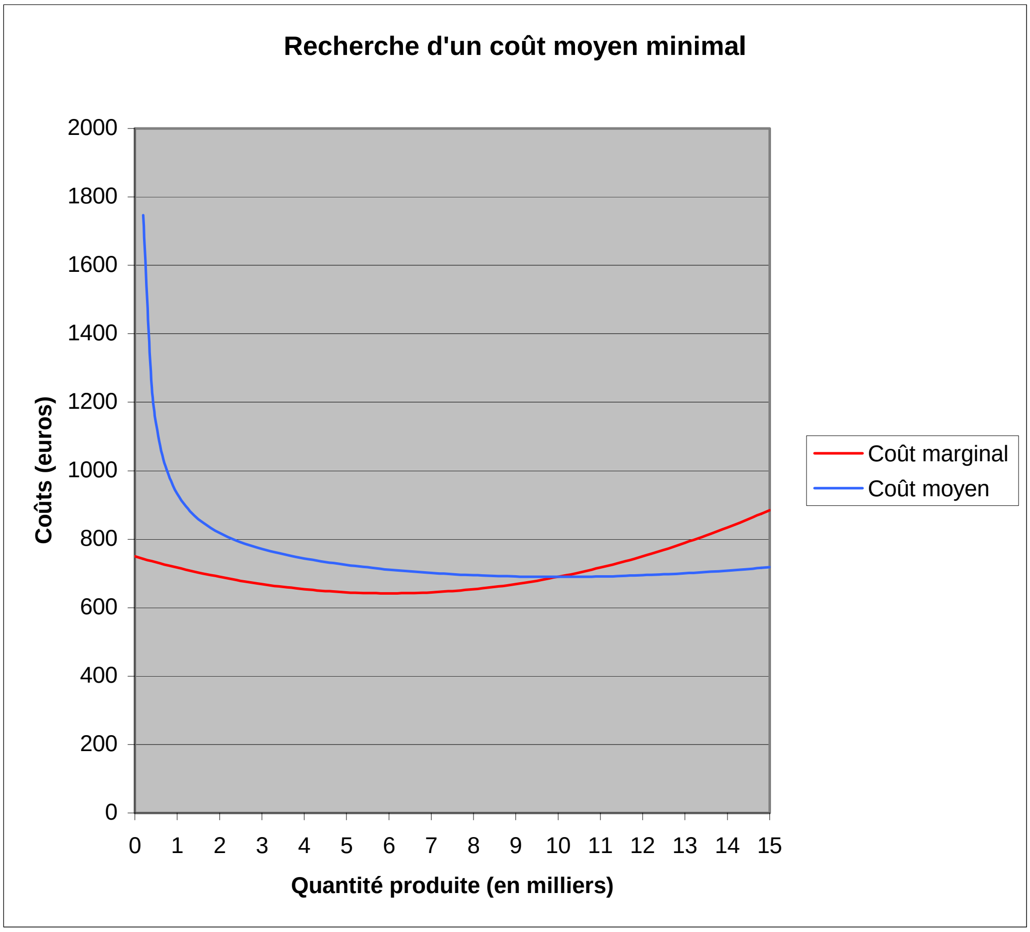
   Par ailleurs, on a :

$$C_m(0) = 750$$
$$C_m(6) = 3 \times 6^2 - 36 \times 6 + 750 = -108 + 750 = 642$$
$$C_m(15) = 3 \times 15^2 - 36 \times 15 + 750 = 885$$

On peut alors construire le tableau de variation suivant :

x	0		6		15
C_m'		-	0	+	
C_m	750	↘	642	↗	885

5. a. On obtient le graphique suivant :



b. D'après le graphique précédent, on peut écrire :

- $C_M(10) = C_m(10)$;
- Pour $x \in]0;10[$, $C_m(x) < C_M(x)$, la courbe du coût moyen est située au-dessus de celle du coût marginal ;
- Pour $x \in]10;15]$, $C_m(x) > C_M(x)$, la courbe du coût moyen est située en dessous de celle du coût marginal.

Etude du cas général

1. On a, sur $\left]0;a\right]$, $C_M\left(x\right)=\dfrac{C_T\left(x\right)}{x}$.

   En dérivant ce rapport et en tenant compte de $C'_T=C_m$, il vient :

$$C_M'\left(x\right)=\frac{C_T'\left(x\right)\times x-C_T\left(x\right)\times 1}{x^2}=\frac{xC_m\left(x\right)-C_T\left(x\right)}{x^2}$$

   En mettant *x* en facteur au numérateur et en tenant compte de $C_M\left(x\right)=\dfrac{C_T\left(x\right)}{x}$, il vient alors :

$$C_M'\left(x\right)=\frac{x\left(C_m\left(x\right)-\dfrac{C_T\left(x\right)}{x}\right)}{x^2}=\frac{C_m\left(x\right)-\dfrac{C_T\left(x\right)}{x}}{x}=\frac{C_m\left(x\right)-C_M\left(x\right)}{x}$$

Pour tout *x* de l'intervalle $\left]0;a\right]$, on a bien :

$$C_M'\left(x\right)=\frac{xC_m\left(x\right)-C_T\left(x\right)}{x^2}=\frac{C_m\left(x\right)-C_M\left(x\right)}{x}$$

2. x_0 et x_1 sont deux éléments de $\left]0;a\right]$ tels que $x_0>x_1$.

   a. Puisque C_M admet un minimum en x_0 (nous supposons de surcroît que ce minimum est strict) et est monotone sur $\left]0;x_0\right]$ et sur $\left]x_0;a\right]$, on peut dire que C_M est décroissante sur $\left]0;x_0\right]$ et croissante sur $\left]x_0;a\right]$.

   On en déduit, la fonction C_M étant supposée dérivable :

   - $C_M'\left(x_0\right)=0$, c'est à dire $C_m\left(x_0\right)=C_M\left(x_0\right)$;
   - Pour tout réel *x* de $\left]0;x_0\right]$, $C_M'\left(x\right)\le 0$, soit : $C_m\left(x\right)-C_M\left(x\right)\le 0$;
   - Pour tout réel *x* de $\left]x_0;a\right]$, $C_M'\left(x\right)\ge 0$, soit : $C_m\left(x\right)-C_M\left(x\right)\ge 0$;

   On a donc, finalement :

   - Pour tout réel *x* de $\left]0;x_0\right]$, $C_M'\left(x\right)\le 0$, soit : $C_m\left(x\right)-C_M\left(x\right)\le 0$;
   - Pour tout réel *x* de $\left]x_0;a\right]$, $C_M'\left(x\right)\ge 0$, soit : $C_m\left(x\right)-C_M\left(x\right)\ge 0$;

   Pour x_0, c'est à dire pour la valeur de *x* correspondant au minimum du coût moyen, le coût marginal est égal au coût moyen.

   b. On suppose ici que C_m est décroissante sur $\left[0;x_1\right]$ et croissante sur $\left[x_1;a\right]$.

   Les courbes représentant les fonctions C_M et C_m peuvent alors avoir l'allure suivante (voir figure ci-après).

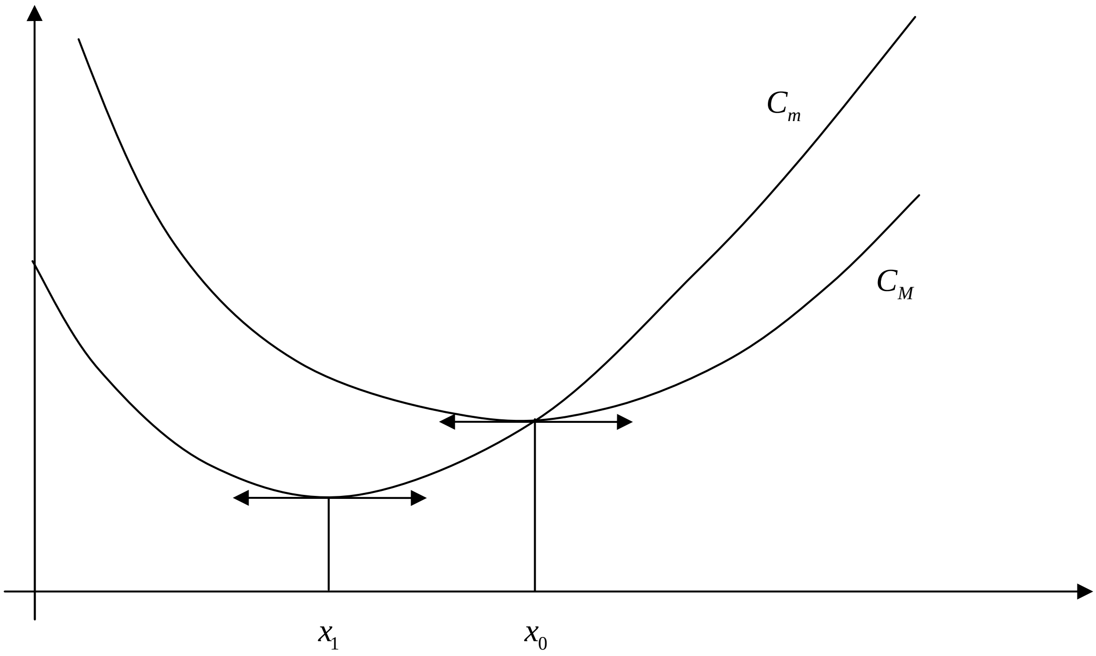


Figure 1. Allure des courbes représentatives des fonctions C_m et C_M .

Complément

Le résultat fondamental obtenu dans cette activité (lorsque le coût moyen est minimum, il est égal au coût marginal) peut, de façon complètement rigoureuse, être établi sous les hypothèses de la partie « Etude du cas général ». Pour autant, in dépendamment de la formalisation mathématique, on peut retrouver ce résultat en raisonnant comme suit :

- Le coût marginal est classiquement interprété comme le coût de production d'une unité supplémentaire. Cette vision est fondamentalement valable pour une production discrète (voiture, ordinateur, …). Pour une production continue, les choses sont différentes mais l'image peut être conservée.
- Dans ces conditions, tant que le coût marginal est inférieur au coût moyen, un accroissement (petit) de la production se fera à un coût inférieur au coût moyen et abaissera donc celui-ci : le coût moyen va diminuer ;
- Le coût marginal se met à croître. Dès qu'il est égal au coût moyen, tout accroissement (petit) de la production se fera à un coût supérieur au coût moyen et contribuera donc à accroître celui-ci.
- Finalement, lorsque le coût moyen est égal au coût marginal, on se trouve bien à un niveau de production pour lequel le coût moyen est minimum.