
Calcul intégral

Corrigés d'exercices / Version d'avril 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 212 : N°13, 14

Page 213 : N°20

Page 214 : N°22

Page 216 : N°41

Page 217 : N°44, 50, 51, 52

Page 224 : N°78

N°13 page 212

1. Remarquons d'abord que pour tout x réel, on a : $x^3 - 6x^2 + 9x = x(x^2 - 6x + 9) = x(x-3)^2$.

On en déduit alors, pour tout x réel différent de 0 et 3 :

$$\begin{aligned} \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2} &= \frac{a(x-3)^2 + bx(x-3) + cx}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{a(x^2 - 6x + 9) + b(x^2 - 3x) + cx}{x(x-3)^2} \\ &= \frac{(a+b)x^2 + (-6a-3b+c)x + 9a}{x(x-3)^2} \end{aligned}$$

On en déduit alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 3\}, \frac{x+9}{x^3 - 6x^2 + 9x} &= \frac{a}{x} + \frac{b}{x-3} + \frac{c}{(x-3)^2} \\ \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} - \{0; 3\}, \frac{x+9}{x^3 - 6x^2 + 9x} &= \frac{(a+b)x^2 + (-6a-3b+c)x + 9a}{x(x-3)^2} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ -6a-3b+c=1 \\ 9a=9 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-a \\ c=1+6a+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=7+3b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R} - \{0; 3\}, \frac{x+9}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{4}{(x-3)^2}$$

2. La fonction inverse admet pour primitive la fonction logarithme népérien sur \mathbb{R}_+^* . Nous retenons ainsi cette primitive sur l'intervalle $[1; 2]$.

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ est de la forme $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u : x \mapsto x-3$. La fonction u prend

des valeurs strictement négatives sur l'intervalle $[1; 2]$. On écrit donc : $\frac{1}{x-3} = \frac{-1}{3-x}$ qui

est de la forme $\frac{v'(x)}{v(x)}$ avec $v : x \mapsto 3-x = -u(x)$, cette fonction prenant des valeurs

strictement positives sur l'intervalle $[1; 2]$. Nous retenons alors comme primitive de la

fonction $x \mapsto \frac{1}{x-3}$ sur l'intervalle $[1; 2]$ la fonction $x \mapsto \ln(v(x)) = \ln(3-x)$

La fonction $x \mapsto \frac{4}{(x-3)^2}$ est de la forme $x \mapsto 4u'(x)(u(x))^{-2}$, la fonction u étant la

fonction définie ci-dessus. Nous en retenons alors comme primitive la fonction

$$x \mapsto 4 \frac{1}{-2+1} (u(x))^{-2+1} = \frac{-4}{x-3}.$$

Finalement, une primitive sur l'intervalle $[1; 2]$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{4}{(x-3)^2}$

est la fonction $x \mapsto \ln x - \ln(3-x) - \frac{4}{x-3} = \ln \frac{x}{3-x} - \frac{4}{x-3}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{x+9}{x^3-6x^2+9x} dx &= \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-3} + \frac{4}{(x-3)^2} \right) dx \\ &= \left[\ln \frac{x}{3-x} - \frac{4}{x-3} \right]_1^2 \\ &= \ln \frac{2}{3-2} - \frac{4}{2-3} - \left(\ln \frac{1}{3-1} - \frac{4}{1-3} \right) \\ &= \ln 2 + 4 - \ln \frac{1}{2} - 2 \\ &= \ln 2 + \ln 2 + 2 \\ &= 2 \ln 2 + 2 \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \frac{x+9}{x^3-6x^2+9x} dx = 2 \ln 2 + 2$$

N°14 page 212

1. Nous procédons comme suggéré dans l'énoncé :

$$\int_0^1 \frac{2x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{x+1} \right) dx$$

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x+1$. La fonction u prenant des valeurs strictement positives sur l'intervalle $[0; 1]$, on en déduit immédiatement que la fonction $x \mapsto \ln(x+1)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$ sur l'intervalle $[0; 1]$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{2x}{x+1} dx &= \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{x+1} \right) dx \\ &= [2x - 2\ln(x+1)]_0^1 \\ &= 2 \times 1 - 2\ln(1+1) - [2 \times 0 - 2\ln(0+1)] \\ &= 2 - 2\ln 2 \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{2x}{x+1} dx = 2 - 2\ln 2$$

2. Pour tout réel x , on a :

$$\frac{2}{e^x + 1} = \frac{2(e^x + 1) - 2e^x}{e^x + 1} = 2 - 2\frac{e^x}{e^x + 1}$$

La fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ est de la forme $\frac{u'}{u}$ avec $u(x) = e^x + 1$. La fonction u prenant des valeurs strictement positives sur \mathbb{R} et donc sur l'intervalle $[\ln 2; \ln 3]$, on en déduit immédiatement que la fonction $x \mapsto \ln(e^x + 1)$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{e^x + 1}$ sur l'intervalle $[\ln 2; \ln 3]$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned}\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2}{e^x + 1} dx &= \int_{\ln 2}^{\ln 3} \left(2 - 2 \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx \\ &= \left[2x - 2 \ln(e^x + 1) \right]_{\ln 2}^{\ln 3} \\ &= 2 \times \ln 3 - 2 \ln(e^{\ln 3} + 1) - \left[2 \times \ln 2 - 2 \ln(e^{\ln 2} + 1) \right] \\ &= 2 \ln 3 - 2 \ln(3 + 1) - \left[2 \ln 2 - 2 \ln(2 + 1) \right] \\ &= 2 \ln 3 - 2 \ln 4 - 2 \ln 2 + 2 \ln 3 \\ &= 4 \ln 3 - 6 \ln 2 \\ &= \ln 3^4 - \ln 2^6 \\ &= \ln 81 - \ln 64 \\ &= \ln \frac{81}{64}\end{aligned}$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{2}{e^x + 1} dx = 4 \ln 3 - 6 \ln 2 = \ln \frac{81}{64}$$

N°20 page 213

1. L'aire du domaine défini dans l'énoncé est l'aire sous la courbe de la fonction inverse sur l'intervalle $[1; e]$. Cette fonction prenant des valeurs strictement positives sur \mathbb{R}_+^* et donc sur l'intervalle $[1; e]$, l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ cherchée vaut :

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = \int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

$$\mathcal{A}(\mathcal{D}) = 1$$

2. La droite d'équation $x = c$ ($1 \leq c \leq e$) partage le domaine \mathcal{D} en deux domaines de mêmes aires si, et seulement si, on a :

$$\int_1^c \frac{1}{x} dx = \int_c^e \frac{1}{x} dx$$

Or :

$$\begin{aligned}\int_1^c \frac{1}{x} dx = \int_c^e \frac{1}{x} dx &\Leftrightarrow [\ln x]_1^c = [\ln x]_c^e \Leftrightarrow \ln c - \ln 1 = \ln e - \ln c \\ &\Leftrightarrow 2 \ln c = 1 \Leftrightarrow \ln c = \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = e^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow c = \sqrt{e}\end{aligned}$$

La droite d'équation $x = c$ partage le domaine \mathcal{D} en deux domaines de mêmes aires si, et seulement si, on a $c = \sqrt{e}$.

N°22 page 214

La fonction f prenant des valeurs positives sur l'intervalle $[-1; 0]$, l'aire $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ est égale à $\int_{-1}^0 f(x) dx$ unités d'aire. L'unité graphique sur les axes étant de 1cm, une unité d'aire correspond à une aire d'1cm².

On a :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 f(x) dx &= \int_{-1}^0 (x^3 + 2x + 3) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 3x \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{4} \times 0^4 + 0^2 + 3 \times 0 - \left(\frac{1}{4} \times (-1)^4 + (-1)^2 + 3 \times (-1) \right) \\ &= -\left(\frac{1}{4} + 1 - 3 \right) \\ &= -\left(-\frac{7}{4} \right) \\ &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

L'aire du domaine hachurée est égale à 1,75cm².

N°41 page 216

1. a) Nous dérivons la fonction g comme produit de deux fonctions dérivables sur l'intervalle $[1; +\infty[$:

$$g'(x) = 2x \times \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$$

$$\forall x \in [1; +\infty[, g'(x) = 2x \ln x + x$$

b) D'après le résultat précédent, on a :

$$\forall x \in [1; +\infty[, f(x) = g'(x) - x$$

On en déduit alors que la fonction $x \mapsto g(x) - \frac{1}{2}x^2 = x^2 \ln x - \frac{1}{2}x^2 = x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

La fonction $x \mapsto x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right)$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

2. Soit m la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1; 3]$.

On a, en tenant compte du résultat obtenu à la question précédente :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x^2 \left(\ln x - \frac{1}{2} \right) \right]_1^3 \\ &= \frac{1}{2} \left[3^2 \times \left(\ln 3 - \frac{1}{2} \right) - 1^2 \times \left(\ln 1 - \frac{1}{2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(9 \ln 3 - \frac{9}{2} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} (9 \ln 3 - 4) \end{aligned}$$

La valeur moyenne de la fonction $f : x \mapsto 2x \ln x$ sur l'intervalle $[1; 3]$
est égale à $\frac{1}{2} (9 \ln 3 - 4)$.

N°44 page 217

1. a) On cherche t tel que $V(t) = 50\% \times 5 = \frac{5}{2}$. On va donc résoudre : $\frac{5}{0,5t+1} = \frac{5}{2}$.

On a facilement : $\frac{5}{0,5t+1} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 0,5t+1 = 2 \Leftrightarrow 0,5t = 1 \Leftrightarrow t = 2$.

La machine aura perdu 50% de sa valeur au bout de deux ans.

b) Pour $t = 4$, on a :

$$V(4) = \frac{5}{0,5 \times 4 + 1} = \frac{5}{2+1} = \frac{5}{3} \approx 1,6667$$

Au bout de 4 ans, l'entreprise pourra revendre la machine $\frac{5000}{3}$ euros
soit environ 1 667 euros (valeur arrondie à l'euro).

2. La valeur moyenne, en milliers d'euros, est donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4-0} \int_0^4 V(t) dt &= \frac{1}{4} \int_0^4 \frac{5}{0,5t+1} dt = \frac{5}{4} \int_0^4 \frac{1}{0,5t+1} dt = \frac{5}{4} \times \frac{1}{0,5} \int_0^4 \frac{0,5}{0,5t+1} dt \\ &= \frac{5}{2} [\ln(0,5t+1)]_0^4 = \frac{5}{2} (\ln(0,5 \times 4 + 1) - \ln(0,5 \times 0 + 1)) = \frac{5}{2} (\ln 3 - \ln 1) \\ &= \frac{5}{2} \ln 3 \approx 2,74653 \end{aligned}$$

La valeur moyenne du prix de revente de la machine dans la période $[0; 4]$ est égale à
 $\frac{5}{2} \ln 3$ milliers d'euros soit environ 2 747 euros (valeur arrondie à l'euro).

N°50 page 217

La linéarité de l'intégrale nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \int_1^2 \sqrt{x^3+1} dx + \int_1^2 (x^3+1-\sqrt{x^3+1}) dx &= \int_1^2 (\sqrt{x^3+1} + x^3+1-\sqrt{x^3+1}) dx \\ &= \int_1^2 (x^3+1) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 + x \right]_1^2 \\ &= \frac{1}{4} \times 2^4 + 2 - \left(\frac{1}{4} \times 1^4 + 1 \right) \\ &= 4 + 2 - \frac{5}{4} \\ &= \frac{19}{4} \end{aligned}$$

$$\int_1^2 \sqrt{x^3+1} dx + \int_1^2 (x^3+1-\sqrt{x^3+1}) dx = \frac{19}{4}$$

N°51 page 217

1. a) On a : $I = \int_0^{\ln 2} e^x dx = [e^x]_0^{\ln 2} = e^{\ln 2} - e^0 = 2 - 1 = 1.$

$$I = \int_0^{\ln 2} e^x dx = 1$$

b) On a (cf. l'exercice 14 de la page 212) :

$$J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = [\ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = \ln(e^{\ln 2} + 1) - \ln(e^0 + 1) = \ln(2 + 1) - \ln(1 + 1) = \ln 3 - \ln 2$$

$$J = \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx = \ln 3 - \ln 2$$

2. On a immédiatement : $I - J = 1 - (\ln 3 - \ln 2) = 1 + \ln 2 - \ln 3.$

Mais on a également, en utilisant la linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} I - J &= \int_0^{\ln 2} e^x dx - \int_0^{\ln 2} \frac{e^x}{e^x + 1} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \left(e^x - \frac{e^x}{e^x + 1} \right) dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^x(e^x + 1) - e^x}{e^x + 1} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x} + e^x - e^x}{e^x + 1} dx \\ &= \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx \end{aligned}$$

On a finalement :

$$K = \int_0^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{e^x + 1} dx = 1 + \ln 2 - \ln 3$$

N°52 page 217

On a :

$$\begin{aligned} 3\int_0^1 x^3 e^{-x} dx + \int_0^1 x^3 \left(1 - \frac{3}{e^x}\right) dx &= \int_0^1 3x^3 e^{-x} dx + \int_0^1 \left(x^3 - \frac{3x^3}{e^x}\right) dx \\ &= \int_0^1 3x^3 e^{-x} dx + \int_0^1 (x^3 - 3x^3 e^{-x}) dx \\ &= \int_0^1 (3x^3 e^{-x} + x^3 - 3x^3 e^{-x}) dx \\ &= \int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{4} \times 1^4 - \frac{1}{4} \times 0^4 \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$3\int_0^1 x^3 e^{-x} dx + \int_0^1 x^3 \left(1 - \frac{3}{e^x}\right) dx = \frac{1}{4}$$

N°78 page 224

Ne cherchez pas de primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur un intervalle quelconque, vous ne la connaissez pas ! (elle existe mais n'est pas du tout à votre programme !). En revanche, vous en savez suffisamment pour affirmer, la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ étant continue sur tout intervalle de \mathbb{R} (c'est une fonction rationnelle et elle est définie sur \mathbb{R}), qu'une telle primitive existe.

En l'occurrence, la fonction $x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$ n'est rien d'autre, souvenez-vous, que la

primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ qui s'annule en 0. Notons-la F.

On cherche donc ici : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0}$ qui n'est rien d'autre que le nombre dérivé

de la fonction F en 0, soit : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = F'(0) = \frac{1}{1+0^2} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = 1$$