Dérivation

(hors fonction exponentielle)

Corrigés d'exercices / Version d'août 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 67 :	N°**8**, **9**	Page 75 :	N°**37**, **39**, **42**, **46**
Page 74 :	N°**29**, **31**, **33**, **35**, **36**	Page 76 :	N°**50**

N°8 page 67

La fonction g est le produit des fonctions u et v définies sur I par : $u : x \mapsto 3x-1$ et $v : x \mapsto \sqrt{x}$. La fonction u est dérivable sur I mais la fonction v est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction g est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x)+u(x)v'(x) \\ &= 3\times\sqrt{x}+(3x-1)\times\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}+3x-1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{6x+3x-1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{9x-1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ g'(x)=\frac{9x-1}{2\sqrt{x}}}$$

N°9 page 67

La fonction h est bien définie pour tout réel x de l'intervalle $\left]-2\,;+\infty\right[$. En tant que fonction rationnelle, elle y est dérivable et pour tout réel x de I, on a :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{(2x-3)\times(x+2)-(x^2-3x+1)\times 1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{2x^2+x-6-x^2+3x-1}{(x+2)^2} \\ &= \frac{x^2+4x-7}{(x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\forall x \in \left]-2\,;+\infty\right[,\ h'(x)=\frac{x^2+4x-7}{(x+2)^2}$$

N°29 page 74

a) On a $A(3\,;3)$ et $B(1\,;0)$. En notant x_A, y_A et x_B, y_B les coordonnées respectives des points A et B, le coefficient directeur de la droite (AB) vaut donc :

$$\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{0-3}{1-3}=\frac{-3}{-2}=\frac{3}{2}$$

L'équation réduite de la droite (AB) s'écrit alors :

$$y=\frac{3}{2}(x-x_B)+y_B=\frac{3}{2}(x-1)+0=\frac{3}{2}(x-1)$$

L'équation réduite de la droite (AB) s'écrit : $y=\frac{3}{2}(x-1)$.

b) Le nombre dérivé $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ en son point d'abscisse 1, c'est-à-dire au point B. Or cette tangente est, d'après l'énoncé, la droite (AB). A la question précédente, nous avons calculé la valeur de ce coefficient directeur et avons obtenu $\frac{3}{2}$. Finalement :

$$f'(1)=\frac{3}{2}$$

N°31 page 74

Notons d'abord que l'on a $f(1) = -1^3 + 1^2 + 3 = -1 + 1 + 3 = 3$ et $g(1) = \frac{1}{1} + 2 = 1 + 2 = 3$. Les deux courbes représentatives se coupent bien en un même point, le point de coordonnées $(1\,;3)$.

La tangente à la courbe représentative de la fonction *f* en ce point admet pour coefficient directeur $f'(1)$. Or, pour tout *x* réel (à fortiori strictement positif), on a : $f'(x) = -3x^2 + 2x$.
D'où : $f'(1) = -3 \times 1^2 + 2 \times 1 = -3 + 2 = -1$.
On raisonne de façon similaire avec la fonction *g*.
On a cette fois : $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$. D'où : $g'(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.
Les tangentes aux courbes représentatives des fonctions *f* et *g* au point de coordonnées $(1\,;3)$ admettant le même coefficient directeur, elles sont confondues.

Les courbes représentatives des fonctions *f* et *g* admettent la même tangente au point de coordonnées $(1\,;3)$.

N°33 page 74

a) Par lecture graphique, nous avons :

- Si $x < 0$ alors $f'(x) < 0$.
- $f'(0) = 0$.
- Si $x > 0$ alors $f'(x) > 0$.

On peut donc conclure :

La fonction *f* est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Soit *x* un réel négatif : $x \leq 0$.
Puisque la fonction *f* est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ on en déduit : $f(x) \geq f(0)$.
Soit maintenant un réel positif : $x \geq 0$.
Puisque la fonction *f* est croissante sur $\mathbb{R}_+$ on en déduit : $f(x) \geq f(0)$.
Ainsi, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq f(0)$ et on en conclut finalement :

$f(0)$ est un minimum de la fonction *f*.

Remarque : en fait, la monotonie stricte de la fonction *f* permet de conclure qu'il s'agit du seul !

N°35 page 74

a) La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[0\,;12]$ en tant que fonction polynôme et on a, pour tout *x* réel dans $[0\,;12]$: $f'(x)=\frac{1}{3}\times 3x^2-11\times 2x+112\times 1=x^2-22x+112$.

Le discriminant Δ associé au trinôme $x^2-22x+112$ vaut :

$$\Delta=22^2-4\times 112=484-448=36$$

Le trinôme $x^2-22x+112$ s'annule donc pour $x_1=\frac{22-\sqrt{36}}{2\times 1}=\frac{22-6}{2}=\frac{16}{2}=8$ et pour $x_2=\frac{22+\sqrt{36}}{2\times 1}=\frac{22+6}{2}=\frac{28}{2}=14$.

Le coefficient de « x^2 » dans le trinôme $x^2-22x+112$ étant positif, on déduit de ce qui précède :

- Pour *x* dans $[0\,;8[$, $f'(x)>0$.
- $f'(8)=0$.
- Pour *x* dans $]8\,;12]$, $f'(x)<0$.

Finalement :

La fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;8]$ et strictement décroissante sur l'intervalle $[8\,;12]$.

b) D'après la question précédente, la fonction *f* admet un maximum pour $x=8$.
On en déduit que :

Le nombre d'unités vendues sera maximal au bout de 8 mois.

Cette valeur maximale est égale à $f(8)=\frac{1}{3}\times 8^3-11\times 8^2+112\times 8=\frac{512}{3}-704+896\simeq 363$ (valeur arrondie à l'unité).

Le nombre maximal est environ égal à 363 (valeur arrondie à l'unité).

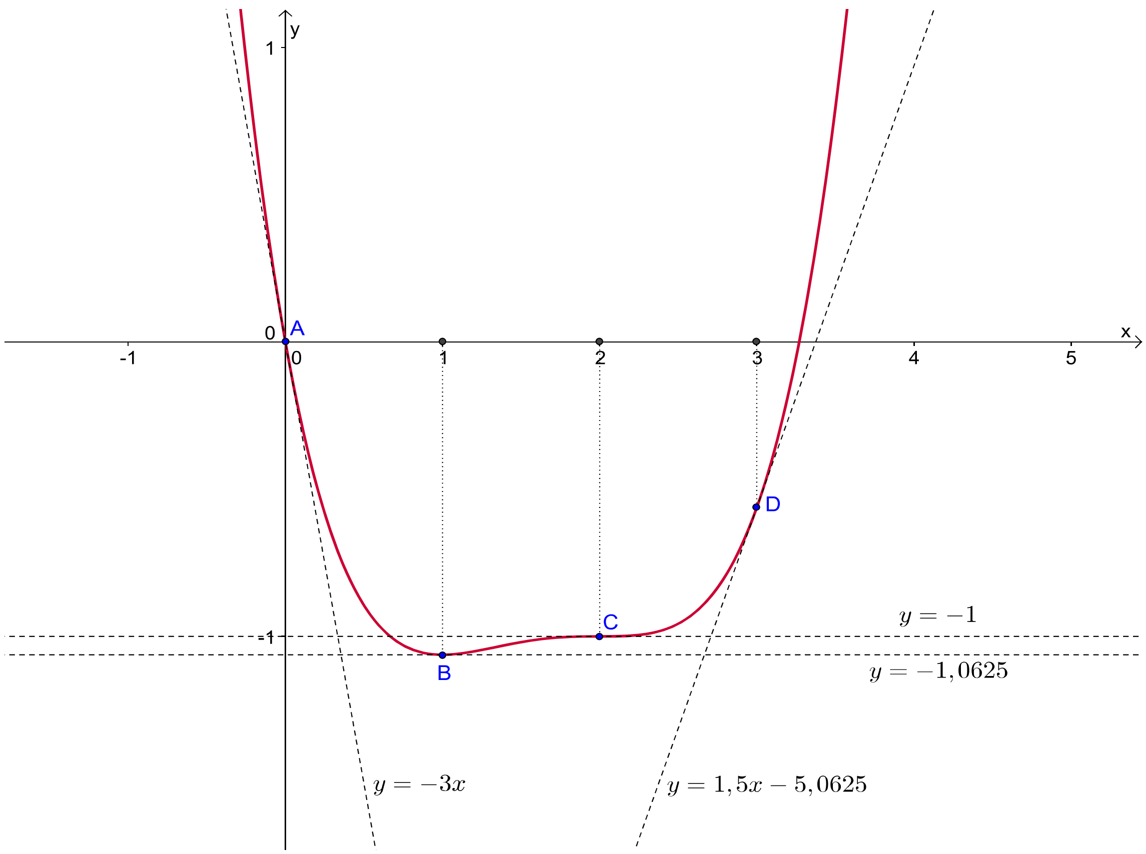
N°36 page 74

a) Comme les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $(3;1,5)$, $(2;0)$, $(1;0)$ et $(0;-3)$, il vient immédiatement :

$$f'(3)=1,5 \qquad f'(2)=0 \qquad f'(1)=0 \qquad f'(0)=-3$$

On dispose ainsi des valeurs des coefficients directeurs des tangentes à la courbe représentative de la fonction f en quatre points. Nous sommes à priori libres de fixer les ordonnées de ces quatre points. Cependant, le graphique fourni nous permet de noter que la fonction f' prend des valeurs négatives pour $x \leq 1$ et positives pour $x \geq 1$. La monotonie de la fonction *f* en découle directement.

b) La courbe proposée ci-dessous est celle d'une fonction polynôme de degré 4.



N°37 page 75

a) Puisque la fonction *f* est dérivable et croissante sur $\mathbb{R}_-$, sa dérivée prend des valeurs positives sur cet intervalle. De même, la fonction *f* est dérivable et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Sa dérivée prendra donc des valeurs négatives sur cet intervalle.

Seule la courbe $\mathscr{C}_2$ correspond à une fonction présentant ces caractéristiques.

La courbe $\mathscr{C}_2$ représente la fonction f'.

b) La fonction *f* est positive sur l'intervalle $[-1\,;+\infty]$. Nous cherchons donc une fonction *g* croissante sur cet intervalle.
Par ailleurs, comme la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$, nous en déduisons que la fonction *f* est négative sur l'intervalle $]-\infty\,;-1]$. Nous cherchons donc une fonction *g* décroissante sur cet intervalle.
Seule la courbe $\mathscr{C}'_3$ correspond à la courbe représentative d'une telle fonction.

La courbe $\mathscr{C}'_3$ représente la fonction *g*.

N°39 page 75

Nous utilisons ici la règle de dérivation : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{2x\times\left(x^2+3\right)-\left(x^2-4\right)\times 2x}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{2x^3+6x-2x^3+8x}{\left(x^2+3\right)^2} = \frac{14x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = \frac{14x}{\left(x^2+3\right)^2}$$

N°42 page 75

Nous utilisons ici la règle de dérivation : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = \dfrac{-v'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+4\right)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)^2}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ f'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+4\right)^2}$$

N°46 page 75

a) Nous utilisons ici la règle de dérivation : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$:

$$f'(x) = \frac{4\times\left(x^2-1\right)-\left(4x+5\right)\times 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{4x^2-4-8x^2-10x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-4x^2-10x-4}{\left(x^2-1\right)^2}$$

$$\forall x \in \left]-\infty\,;-1\right[,\ f'(x) = \frac{-4x^2-10x-4}{\left(x^2-1\right)^2}$$

b) On a : $-4x^2-10x-4 = -2\left(2x^2+5x+2\right)$. Pour étudier le signe du trinôme $-4x^2-10x-4$, nous pouvons étudier celui de $2x^2+5x+2$.
Le discriminant Δ associé au trinôme $2x^2+5x+2$ vaut : $\Delta = 5^2-4\times 2\times 2 = 25-16 = 9$.
Les valeurs annulant $2x^2+5x+2$ sont donc : $x_1 = \frac{-5-\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{-5-3}{4} = \frac{-8}{4} = -2$ et
$x_2 = \frac{-5+\sqrt{9}}{2\times 2} = \frac{-5+3}{4} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$.
On en déduit :

- $2x^2+5x+2<0$ sur $\left]-2\,;-\frac{1}{2}\right[$.
- $2x^2+5x+2>0$ sur $\left]-\infty\,;-2\right[\cup\left]-\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$.

Finalement :

Sur l'intervalle $\left]-\infty\,;-1\right[$, on a :
- $-4x^2-10x-4>0$ sur $\left]-2\,;-1\right[$.
- $-4x^2-10x-4=0$ pour $x=-2$.
- $-4x^2-10x-4<0$ sur $\left]-\infty\,;-2\right[$.

c) Le dénominateur de la fonction f' étant strictement positif, $f'(x)$ est du même signe que $-4x^2-10x-4$:

- $f'(x)>0$ sur $]-2\,;-1[$.
- $f'(x)=0$ pour $x=-2$.
- $f'(x)<0$ sur $]-\infty\,;-2[$.

On déduit de ce qui précède :

La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $]-\infty\,;-2]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[-2\,;-1[$.

On déduit immédiatement de ces variations que la fonction *f* admet un minimum pour $x=-2$. Ce minimum vaut : $f(-2)=\dfrac{4\times(-2)+5}{(-2)^2-1}=\dfrac{-8+5}{4-1}=\dfrac{-3}{3}=-1$.

N°50 page 76

Comme la courbe $\mathscr{C}$ passe par les points $\mathrm{A}(0\,;1)$ et $\mathrm{B}(1\,;2)$, il vient immédiatement $f(0)=1$ et $f(1)=2$.

On a : $f(0)=1\Leftrightarrow a\times0^3+b\times0^2+c\times0+d=1\Leftrightarrow \boxed{d=1}$.

Puis : $f(1)=2\Leftrightarrow a\times1^3+b\times1^2+c\times1+1=2\Leftrightarrow \underline{a+b+c=1}$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en B étant horizontale, on a : $f'(1)=0$.

Pour tout *x* réel, on a : $f'(x)=3ax^2+2bx+c$.

D'où : $f'(1)=0\Leftrightarrow 3a\times1^2+2b\times1+c=0\Leftrightarrow \underline{3a+2b+c=0}$.

La tangente à $\mathscr{C}$ en A ayant pour coefficient directeur $-\dfrac{1}{3}$, on a : $f'(0)=-\dfrac{1}{3}$.

D'où : $f'(0)=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow 3a\times0^2+2b\times0+c=-\dfrac{1}{3}\Leftrightarrow \boxed{c=-\dfrac{1}{3}}$.

Les deux équations $a+b+c=1$ et $3a+2b+c=0$ nous donnent alors le système :

$$\begin{cases} a+b-\dfrac{1}{3}=1 \\ 3a+2b-\dfrac{1}{3}=0 \end{cases}$$

On a alors :

$$\begin{cases} a+b-\frac{1}{3}=1 \\ 3a+2b-\frac{1}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1+\frac{1}{3} \\ 3a+2b=\frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=\frac{4}{3} \\ 3a+2b=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a+2b-2\times(a+b)=\frac{1}{3}-2\times\frac{4}{3} \\ a+b=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{7}{3} \\ a+b=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{7}{3} \\ -\frac{7}{3}+b=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{7}{3} \\ b=\frac{4}{3}+\frac{7}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{7}{3} \\ b=\frac{11}{3} \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{f(x)=-\frac{7}{3}x^3+\frac{11}{3}x^2-\frac{1}{3}x+1}$$