Dérivées et primitives

Corrigés d'exercices

N°119 page 103

Partie A

x désigne la quantité produite en litres ;
$C_T(x)$ désigne le coût total de production en euros.

Le coût total de production C_T étant une fonction croissante, sa dérivée doit être positive.
→ On élimine ainsi le graphique 1 sur lequel la fonction représentée prend des valeurs négatives.

La courbe représentative du coût total n'étant pas une droite, le coût marginal ne peut être constant.
→ On élimine ainsi le graphique 2 représentant une fonction constante.

D'après l'énoncé, on a $C_T(450) = 400$. La courbe du coût total passe donc par le point de coordonnées $(450; 400)$. Or, la tangente en ce point à la courbe de coût total passe également par l'origine. Son coefficient directeur vaut donc :

$$\frac{400-0}{450-0} = \frac{400}{450} = \frac{8}{9}$$

Ce coefficient est la valeur prise par la dérivée du coût total pour $x = 450$, c'est-à-dire $C_m(450)$. Malgré les imprécisions dues à la lecture graphique, on constate immédiatement sur le graphique 4 que la fonction représentée prend une valeur strictement supérieur à 10 pour $x = 450$.
→ On élimine ainsi le graphique 4.

C'est donc la représentation graphique 3 qui correspond au coût marginal associé à la production du liquide A.

Partie B

1) a. On a, pour tout réel *x* strictement positif :

$$f(x)=0,5x+\frac{8}{x}$$

La fonction *f* étant une fonction rationnelle (même si l'expression de $f(x)$ n'est pas, à proprement parler, un rapport), elle est dérivable sur son ensemble de définition et on a :

$$f'(x)=0,5-\frac{8}{x^2}$$

Il vient alors :

$$f'(x)=0,5-\frac{8}{x^2}=\frac{1}{2}-\frac{8}{x^2}=\frac{x^2-2\times 8}{2x^2}=\frac{x^2-16}{2x^2}=\frac{(x-4)(x+4)}{2x^2}$$

Pour tout réel *x* strictement positif, on a : $2x^2>0$.
Pour étudier le signe de la dérivée, on va donc étudier le signe du numérateur.
Le produit $(x-4)(x+4)$ s'annule sur $\mathbb{R}$ pour $x=4$ et $x=-4$. Il est alors strictement positif sur $]-\infty;-4[\cup]+4;+\infty[$ et strictement négatif sur $]-4;+4[$.
Si maintenant on raisonne sur l'intervalle $]0;+\infty[$, on obtient :

- Pour $x=4$, $f'(x)=0$;
- Pour $x\in]0;+4[$, $f'(x)<0$ et la fonction *f* est strictement décroissante ;
- Pour $x\in]+4;+\infty[$, $f'(x)>0$ et la fonction est strictement croissante.

b. Limite en 0 (à droite) de la fonction *f*.

On a : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} 0,5x=0^+$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{8}{x}=+\infty$. D'où :

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty}$$

Limite en $+\infty$ de la fonction *f*.

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} 0,5x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{8}{x}=0^+$. D'où :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty}$$

c. D'après l'expression de $f(x)$, on peut écrire :

$$f(x) - 0,5x = \frac{8}{x}$$

Or, on a vu que l'on avait : $\lim_{x \to +\infty} \frac{8}{x} = 0^+$. On en déduit :

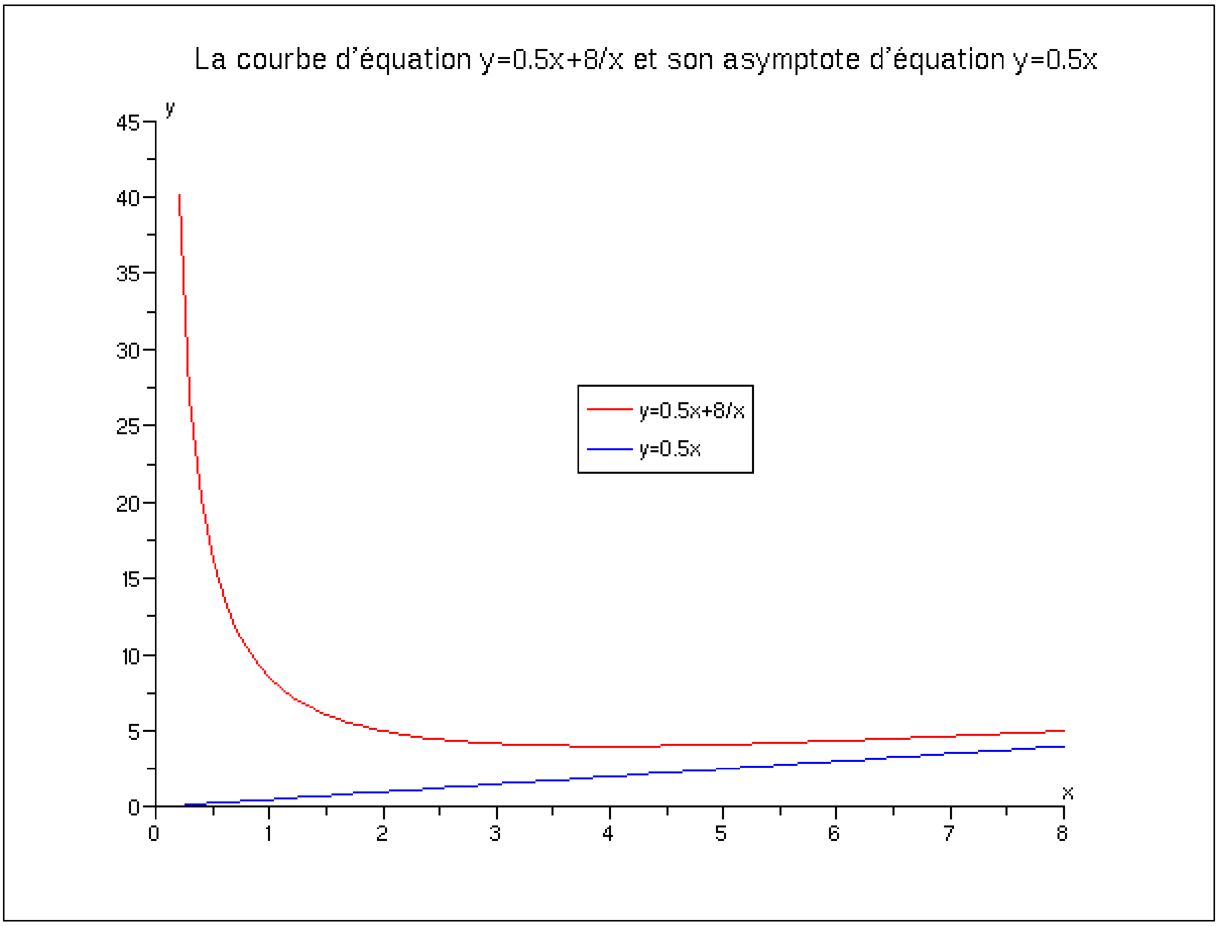
La courbe $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ une asymptote oblique D d'équation : $y = 0,5x$.

Pour étudier la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à D, il convient d'étudier le signe de $f(x) - 0,5x = \frac{8}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif, on a immédiatement $\frac{8}{x} > 0$. On en déduit :

La courbe $\mathcal{C}$ est située au dessus de la droite D d'équation : $y = 0,5x$.

d. A partir des éléments précédents, on obtient :



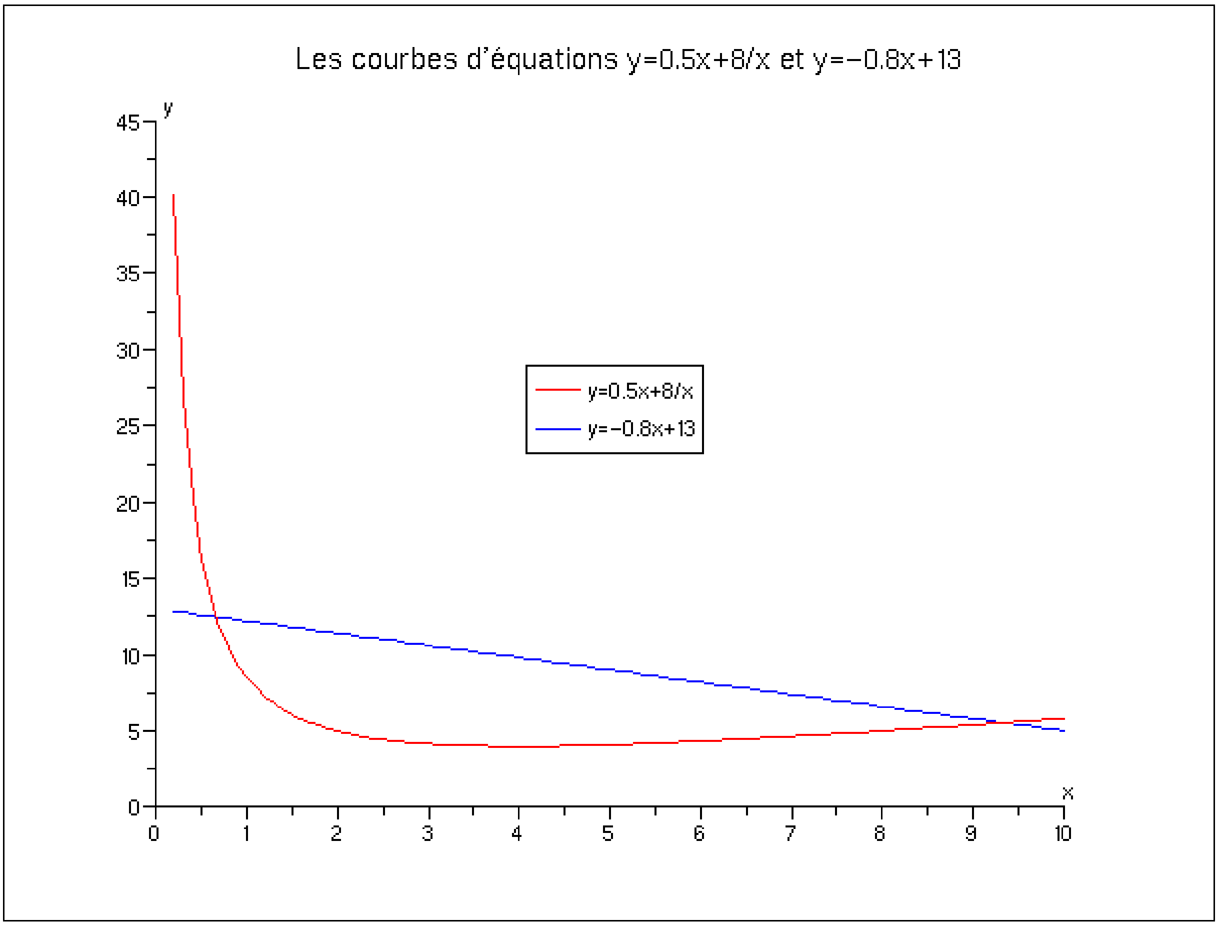
2) Seuil de rentabilité pour l'entreprise.

Le prix de vente à l'hectolitre en milliers d'euros est donné par :

$$p(x) = -0,8x + 13$$

Où x désigne le nombre d'hectolitres.

a. On obtient :



L'entreprise sera bénéficiaire si le prix de vente est supérieur au coût total de production. Graphiquement, on s'intéresse donc aux valeurs de x telles que la courbe du prix de vente (bleue sur le graphique ci-dessus) soit située au dessus de la courbe du coût total (en rouge sur le graphique ci-dessus).

On obtient (aux imprécisions de lecture près !) :

$$0,7 < x < 9,4$$

b. On doit ici résoudre :

$$p(x) > f(x)$$

Soit :

$$-0,8x+13 > 0,5x+\frac{8}{x}$$

Le réel x étant strictement positif on a :

$$\begin{aligned}&-0,8x+13 > 0,5x+\frac{8}{x}\\ &\Leftrightarrow 1,3x+\frac{8}{x}-13<0\\ &\Leftrightarrow 1,3x^2-13x+8<0\end{aligned}$$

On est ainsi ramené à la résolution d'une inéquation du second degré.
On a alors : $\Delta=(-13)^2-4\times 1,3\times 8=127,4$. D'où les racines :

$$x_1=\frac{13-\sqrt{127,4}}{2\times 1,3}\simeq 0,66 \text{ et } x_2=\frac{13+\sqrt{127,4}}{2\times 1,3}\simeq 9,34$$

On trouve des valeurs conformes à celles obtenues par lecture graphique.

L'entreprise sera bénéficiaire lorsque sa production sera comprise entre 66 et 940 litres.