

---

# *Fluctuation, estimation*

Corrigés d'exercices / Version de mai 2013

---

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 223	: N°5, 6
Page 226	: N°14, 15, 16, 20
Page 227	: N°25

---

## N°5 page 223

L'intervalle de confiance au niveau de confiance 0,95 s'écrit  $\left[ f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$  où  $f$  est la proportion calculée sur l'échantillon et  $n$  la taille de l'échantillon.

La longueur de cet intervalle vaut :  $\frac{2}{\sqrt{n}}$ .

On veut que cette longueur soit au plus égale à 0,04. On doit donc résoudre :  $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04$ .

On a :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,04 \Leftrightarrow 2 \leq 0,04\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2}{0,04} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 50 \Leftrightarrow n \geq 50^2 = 2500$$

La taille de l'échantillon doit être au moins de 2 500 personnes.

## N°6 page 223

a) La proportion  $f$  calculée à partir de l'échantillon de taille  $n = 45$  vaut :  $f = \frac{25}{45} = \frac{5}{9}$ .

$$\text{On a : } f - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{5}{9} - \frac{1}{\sqrt{45}} = \frac{5}{9} - \frac{1}{3\sqrt{5}} = \frac{25 - 3\sqrt{5}}{45} \approx 0,406 \text{ et } f + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{25 + 3\sqrt{5}}{45} \approx 0,705.$$

Par ailleurs :

- $n = 45 \geq 30$
- $n \left( f - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 45 \times \frac{25 - 3\sqrt{5}}{45} = 25 - 3\sqrt{5} \approx 18,3 \geq 5$
- $n \left( 1 - \left( f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) = 45 \times \left( 1 - \frac{25 + 3\sqrt{5}}{45} \right) = 20 - 3\sqrt{5} \approx 13,3 \geq 5$

On accepte ainsi l'intervalle  $[0,406 ; 0,705]$  comme intervalle de confiance au seuil de confiance de 0,95.

L'intervalle de confiance de  $p$  au seuil de confiance de 0,95 est  $[0,406 ; 0,705]$ .

Ainsi, la pourcentage des notes supérieures à 10 a une probabilité supérieure ou égale à 0,95 de se situer entre 40,6% et 70,5%. On est ainsi potentiellement « loin » de l'objectif fixé de 80% des notes supérieures à 10.

**b)** La proportion  $f$  calculée à partir du nouvel échantillon de taille  $n = 36$  vaut :  $f = \frac{25}{36}$ .

On a :  $f - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{25}{36} - \frac{1}{\sqrt{36}} = \frac{25}{36} - \frac{1}{6} = \frac{19}{36} \approx 0,528$  et  $f + \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{25+6}{36} = \frac{31}{36} \approx 0,861$ .

Par ailleurs :

- $n = 36 \geq 30$
- $n \left( f - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = 36 \times \frac{19}{36} = 19 \geq 5$
- $n \left( 1 - \left( f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right) \right) = 36 \times \left( 1 - \frac{31}{36} \right) = 36 \times \frac{5}{36} = 5 \geq 5$

On accepte ainsi l'intervalle  $[0,528 ; 0,861]$  comme intervalle de confiance au seuil de confiance de 0,95.

L'intervalle de confiance de  $p$  au seuil de confiance de 0,95 est  $[0,528 ; 0,861]$ .

Cette fois, Le pourcentage attendu de 80% se situe dans l'intervalle de confiance. Il est donc légitime, dans une certaine mesure, que le jury accepte le nouveau barème puisque la probabilité que le pourcentage de notes supérieures à 10 se situe dans l'intervalle  $[0,528 ; 0,861]$

c) La longueur de l'intervalle de confiance au seuil de 0,95 est égale à  $\frac{2}{\sqrt{n}}$ .

Si on souhaite que cette longueur soit au plus égale à 0,2 on doit résoudre :  $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,2$ .

On a :

$$\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,2 \Leftrightarrow 2 \leq 0,2\sqrt{n} \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{2}{0,2} = 10 \Leftrightarrow n \geq 10^2 = 100$$

Pour que la longueur de l'intervalle de confiance au seuil de confiance de 0,95 soit au plus de 0,2 la taille de l'échantillon doit être au moins de 100.

**N°14 page 226**

On a :

- $n = 1000 \geq 30$
- $np = 1000 \times 0,5 = 500 \geq 5$
- $n(1-p) = 1000 \times (1-0,5) = 1000 \times 0,5 = 500 \geq 5$

On peut donc utiliser l'intervalle  $\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ .

Ici :  $p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,5 - 1,96 \frac{\sqrt{0,5^2}}{\sqrt{1000}} = 0,5 - 1,96 \frac{0,5}{10\sqrt{10}} = 0,5 \left( 1 - \frac{0,196}{\sqrt{10}} \right) \approx 0,469$  et

$$p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,5 \left( 1 + \frac{0,196}{\sqrt{10}} \right) \approx 0,531.$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion 0,5 au seuil de 95% est, avec un échantillon de taille 1000 :  $[0,469 ; 0,531]$ .

**N°15 page 226**

On a :

- $n = 100 \geq 30$
- $np = 100 \times 0,35 = 35 \geq 5$
- $n(1-p) = 100 \times (1-0,35) = 100 \times 0,65 = 65 \geq 5$

On peut donc utiliser l'intervalle  $\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ .

Ici :

$$\begin{aligned} p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} &= 0,35 - 1,96 \frac{\sqrt{0,35 \times 0,65}}{\sqrt{100}} \\ &= 0,35 - 1,96 \frac{\sqrt{0,2275}}{10} \\ &= 0,35 - 0,196 \times \sqrt{0,2275} \\ &\approx 0,257 \end{aligned}$$

et  $p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,35 + 0,196 \times \sqrt{0,2275} \approx 0,443$ .

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion 0,35 au seuil de 95% est, avec un échantillon de taille 100 :  $[0,257 ; 0,443]$ .

**N°16 page 226**

On a :

- $n = 2000 \geq 30$
- $np = 2000 \times 0,1 = 200 \geq 5$
- $n(1-p) = 2000 \times (1-0,1) = 2000 \times 0,9 = 1800 \geq 5$

On peut donc utiliser l'intervalle  $\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ .

Ici :

$$\begin{aligned} p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} &= 0,1 - 1,96 \frac{\sqrt{0,1 \times 0,9}}{\sqrt{2000}} = 0,1 - 1,96 \frac{\sqrt{0,09}}{20\sqrt{5}} \\ &= 0,1 - 1,96 \frac{0,3}{20\sqrt{5}} = 0,1 - \frac{0,588}{20\sqrt{5}} \\ &\approx 0,087 \end{aligned}$$

et  $p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,1 + \frac{0,588}{20\sqrt{5}} \approx 0,113$ .

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion 0,1 au seuil de 95% est, avec un échantillon de taille 2000 :  $[0,087 ; 0,113]$ .

**N°20 page 226**

- a) Puisque le technicien a détecté 220 clés d'une capacité de 4Go, il va pouvoir tester l'hypothèse « 60% des clés fournis sont supposées avoir une capacité de 4Go ».
- b) Pour une proportion  $p = 60\%$  et un échantillon de taille  $n = 400$ , on a :
- $n = 400 \geq 30$
  - $np = 400 \times 0,6 = 240 \geq 5$
  - $n(1-p) = 400 \times (1-0,6) = 400 \times 0,4 = 160 \geq 5$

On peut donc utiliser l'intervalle  $\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ .

$$\text{Ici : } p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,6 - 1,96 \frac{\sqrt{0,6 \times 0,4}}{\sqrt{400}} = 0,6 - 1,96 \frac{\sqrt{0,24}}{20} \approx 0,552$$

$$\text{et : } p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,6 + 1,96 \frac{\sqrt{0,24}}{20} \approx 0,648.$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion 0,6 au seuil de 95% est, avec un échantillon de taille 400 :  $[0,552 ; 0,648]$ .

- c) D'après le résultat précédent, si 60% des clés ont effectivement une capacité de 4Go, alors la proportion de clés 4Go de l'échantillon testé a une probabilité égale à 0,95 de se trouver dans l'intervalle  $[0,552 ; 0,648]$ .

Ici, cette proportion vaut :  $f = \frac{220}{400} = 0,55 = 55\%$ .

Comme  $0,55 \notin [0,552 ; 0,648]$ , on doit refuser l'hypothèse formulée en a) et le technicien devrait alerter son patron.

Pour autant, cette valeur étant très proche de la borne inférieure de l'intervalle de fluctuation, il serait pertinent de refaire une étude sur un nouvel échantillon.

**N°25 page 227**

- a) L'adjudant teste l'hypothèse : « 47% des soldats conscrits ont les yeux bleus ».
- b) Le pourcentage  $f$  de soldats ayant les yeux bleus dans l'échantillon considéré vaut :

$$f = \frac{154}{350} = 0,44 = 44\%$$

L'échantillon comporte 44% de soldats aux yeux bleus.

L'adjudant, ne disposant de la notion d'intervalle de fluctuation a probablement conclu que le pourcentage de soldats aux yeux bleus avait diminué depuis 1880.

c) Pour une proportion  $p = 47\%$  et un échantillon de 350 individus on a :

- $n = 350 \geq 30$
- $np = 350 \times 0,47 = 164,5 \geq 5$
- $n(1-p) = 350 \times (1-0,47) = 350 \times 0,53 = 185,5 \geq 5$

On peut donc utiliser l'intervalle  $\left[ p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ .

$$\text{Ici : } p - 1,96 \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,47 - 1,96 \frac{\sqrt{0,47 \times 0,53}}{\sqrt{350}} = 0,47 - 1,96 \frac{\sqrt{0,2491}}{\sqrt{350}} \approx 0,418$$

$$\text{et } p + 1,96 \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,47 + 1,96 \frac{\sqrt{0,2491}}{\sqrt{350}} \approx 0,522.$$

L'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion 0,47 au seuil de 95% est, avec un échantillon de taille 350 :  $[0,418 ; 0,522] = [41,8\% ; 52,2\%]$ .

d) Comme  $f = 44\% \in [41,8\% ; 52,2\%]$ , cette proportion mesurée est tout à fait compatible avec une proportion réelle de 47%.

Selon l'approche moderne de l'intervalle de fluctuation, on ne pourrait pas conclure, sur la base de l'échantillon des 350 conscrits à une évolution du pourcentage de soldats aux yeux bleus.

e) Reprenons les calculs de la question c) avec  $n = 10\,500$ .

Les conditions sont toujours vérifiées (si elles le sont pour une certaine valeur de  $n$ , elles le seront pour une valeur supérieure).

On a cette fois :

$$p - 1,96 \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,47 - 1,96 \frac{\sqrt{0,47 \times 0,53}}{\sqrt{10\,500}} = 0,47 - 1,96 \frac{\sqrt{0,2491}}{\sqrt{10\,500}} \approx 0,4605$$

$$\text{et } p + 1,96 \frac{\sqrt{p \times (1-p)}}{\sqrt{n}} = 0,47 + 1,96 \frac{\sqrt{0,2491}}{\sqrt{10\,500}} \approx 0,4795.$$

Cette fois, l'intervalle de fluctuation asymptotique de la proportion 0,47 au seuil de 95% est, avec un échantillon de taille 10 500 :  $[0,4605 ; 0,4795] = [46,05\% ; 47,95\%]$ .

Cette fois, la proportion mesurée, 43%, n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation asymptotique et on rejette l'hypothèse selon laquelle 47% des conscrits ont les yeux bleus. L'adjudant aboutirait assez naturellement à cette même conclusion !