



# Histoires du Père Noël

---

## Mathématiques – Devoir maison Terminale ES1

**1** A l'issue de sa tournée le Père Noël, fourbu, doit encore distribuer cinq cadeaux dans une maison où vit une famille comptant deux enfants, Sophie et Bastien. Assis en équilibre précaire sur le faîte du toit, la hotte l'entraînant dangereusement en arrière, notre pauvre bonhomme hésite encore à jeter négligemment les cinq cadeaux dans la cheminée et à s'en retourner derechef chez lui ... Pris de scrupules et désireux d'honorer sa réputation – le Père Noël passe par la cheminée, c'est bien connu – il décide finalement de procéder comme à l'accoutumée, une dernière fois ...

Arrivé dans l'âtre (la bienséance nous interdit de décrire l'atterrissage ...), il avise rapidement le beau sapin décoré qui trône (n'est-il pas normal que le « roi des forêts » trône ?) dans un coin du salon et, à son pied (celui du sapin, bien sûr), les chaussons des deux enfants. La maison est endormie, le Père Noël s'avance tranquillement mais prudemment, car la pièce est obscure, et s'apprête à poser les cadeaux lui restant lorsqu'il réalise soudainement qu'il n'a pas la moindre idée de leur contenu ! Il est hors de question de les ouvrir ! Que faire ?

Entendant des bruits dans la pièce voisine, le Père Noël s'affole et distribue au hasard les cadeaux entre les deux paires de chaussons, sans prendre garde à ce qu'il fait. L'instant d'après, il quitte la maison par le conduit de cheminée ...

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles pour les cinq cadeaux (on pourra s'aider d'un arbre) ?
2. On note  $S$  le nombre de cadeaux reçus par Sophie (il s'agit donc d'une variable aléatoire, n'est-ce pas ?).
  - a. Quelles sont les valeurs possibles de  $S$  ?
  - b. Quelle est la loi de probabilité de  $S$  ?
  - c. Quelle est son espérance ?
  - d. Donner la probabilité  $p(S = k)$  pour toutes les valeurs  $k$  pouvant être prises par  $S$  ;
  - e. Quelle est la probabilité que chaque enfant ait au moins deux cadeaux ?

**2** L'année suivante, le Père Noël doit faire face à une situation analogue ... Mais cette fois, ce sont dix cadeaux qu'il doit distribuer à trois enfants : Vincent, Stéphanie et Eloi. Une fois encore, la distribution se fait au petit bonheur la chance ...

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles pour les dix cadeaux ?
2. On s'intéresse à l'événement A suivant : « tous les enfants reçoivent au moins un cadeau » (on veut bien que le Père Noël se montre ... peu professionnel en fin de tournée mais il y a quand même des limites (sans jeu de mots ...) ! Il est donc normal que cet événement nous intéresse ... non ?).
  - a. Exprimer en français l'événement  $\bar{A}$  ;
  - b. Soit  $A_i$  l'événement « le  $i$ ème enfant n'a pas de cadeau ». Calculer la probabilité  $p(A_i)$  ;
  - c. En utilisant  $\bar{A} = A_1 \cup A_2 \cup A_3$  et l'égalité :
 
$$p(X \cup Y \cup Z) = p(X) + p(Y) + p(Z) - p(X \cap Y) - p(X \cap Z) - p(Y \cap Z) + p(X \cap Y \cap Z)$$
 calculer  $p(\bar{A})$  puis  $p(A)$  (on donnera des fractions irréductibles et des valeurs approchées au centième) ;
3. Généralisation. Cette fois, ce ne sont pas 10 mais  $n$  (avec  $n \geq 3$ ) cadeaux que le Père Noël doit répartir !
  - a. Calculer  $p(A)$  en fonction de  $n$  ;
  - b. (Facultatif pour les NON SPE MATHS) Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p(A)$ . Conclusion ?

**3** La dernière année, les choses se gâtent ! Le Père Noël doit terminer sa tournée par une famille de quatre enfants. Les lutins aidant le Père Noël ayant peut-être été distraits dans leur travail ou le traîneau supersonique utilisé par le Père Noël ayant un peu versé dans un virage, il ne reste plus dans la hotte que trois cadeaux ! C'est la catastrophe ! Une réclamation sera probablement déposée dès le 26 décembre (les bureaux sont fermés le 25) auprès du ministère compétent (on ne vous demande pas lequel) ... En attendant, le Père Noël se retrouve dans un état fébrile que jamais la plus terrible des gripes (du temps où il ne sa faisait pas vacciner) n'était parvenue à lui faire connaître ... Là, on ne parle même plus de distribution au hasard (mais dans ce qui suit, nous conservons cette visions des choses ☺) !

Quoiqu'il en soit, et en attendant de donner un éventuel coup de main au Père Noël à partir du 26 décembre, on se pose quelques questions (étonnant, non ?) ...

1. La première est des plus originales : combien y a-t-il de répartitions possibles pour les trois cadeaux ?
2. Calculer la probabilité que deux enfants exactement ne reçoivent pas de cadeaux (on explicitera soigneusement la démarche permettant de comptabiliser les issues réalisant cet événement).



*Excellente fin d'année 2006 !*