
Lois à densité

Corrigés d'exercices / Version de juin 2013

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 205	: N°43, 44
Page 206	: N°48, 57, 58
Page 207	: N°60, 63

N°43 page 205

- 1) D'après le cours (résultat à connaître par cœur !), on a, pour une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite : $p(-2 \leq X \leq 2) = p(X \in [-2; 2]) \approx 0,95$.

On en déduit immédiatement :

$$a = 2$$

Remarque : ce genre de question est, in fine, très mal posée, l'usage de l'article défini « le » (... nombre réel a tel que ...) étant plus que malvenu ! Vous savez en effet, que l'on a également : $p(-1,96 \leq X \leq 1,96) \approx 0,95$ (mais cette fois, on est plus proche de 0,95 !).

Ainsi, on peut répondre de bien des façons !

Concrètement, la réponse fournie ci-dessus est celle qui se rapporte directement à un résultat classique du cours (à connaître par cœur, on ne le répétera jamais assez ! 😊).

- 2) En tenant compte de la parité de la densité de la loi normale centrée réduite (ou, graphiquement, de la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées de sa courbe représentative), on a, pour tout réel x positif : $p(-x \leq X \leq 0) = p(0 \leq X \leq x)$ et donc :

$$p(-x \leq X \leq x) = p(-x \leq X \leq 0) + p(0 \leq X \leq x) = 2p(0 \leq X \leq x).$$

$$\text{Finalement : } p(0 \leq X \leq x) = \frac{1}{2} p(-x \leq X \leq x).$$

$$\text{On en déduit : } p(0 \leq X \leq a) = \frac{1}{2} p(-a \leq X \leq a) \approx \frac{1}{2} \times 0,95 = 0,475.$$

$$p(0 \leq X \leq a) \approx 0,475$$

3) On a ici :

$$\begin{aligned} p(X \leq a) &= p(X \in]-\infty ; a]) \\ &= p(X \in]-\infty ; 0] \text{ ou } X \in]0 ; a]) \\ &= p(X \in]-\infty ; 0]) + \underbrace{p(X \in]0 ; a])}_{=p(X \in [0 ; a])} \\ &\simeq \frac{1}{2} \times 0,475 \\ &= 0,975 \end{aligned}$$

$p(X \leq a) \simeq 0,975$

N°44 page 205

1. Le nombre « $-1E+99$ » (CASIO) ou « -10^{99} » (TI) représente « $-\infty$ ». La borne supérieure saisie vaut 1,5. Ainsi, Malika et Alexandra ont utilisé leur calculatrice pour obtenir une valeur approchée de la probabilité que la variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite prenne une valeur dans l'intervalle $]-\infty ; 1,5]$. Si (en jetant un œil à la question suivante ...), on note X cette variable aléatoire, la probabilité calculée est donc :

$p(X \in]-\infty ; 1,5]) = p(X \leq 1,5)$
--

2. En retenant alors la valeur approchée $p(X \in]-\infty ; 1,5]) = p(X \leq 1,5) \simeq 0,933193$, il vient :

a) $p(X > 1,5) = 1 - p(X \leq 1,5) \simeq 1 - 0,933193 = \boxed{0,066807}$.

b) Par ailleurs (le calcul qui suit est classique ! Aidez-vous éventuellement de la courbe en cloche pour bien en comprendre les étapes) :

$$\begin{aligned} p(-1,5 < X < 1,5) &= p(X < 1,5) - p(X < -1,5) \\ &= p(X < 1,5) - p(X > 1,5) \\ &= p(X < 1,5) - [1 - p(X < 1,5)] \\ &= 2p(X < 1,5) - 1 \\ &\simeq 2 \times 0,933193 - 1 \\ &= \boxed{0,866386} \end{aligned}$$

c) Enfin, en utilisant le résultat du a) : $p(X < -1,5) = p(X > 1,5) \simeq \boxed{0,066807}$

N°48 page 206

A la calculatrice, on obtient facilement : $p(0,2 < X < 0,7) \approx 0,178\,777$.

En tenant compte de la parité de la densité de la loi normale centrée réduite (ou, de façon équivalente, de la symétrie de sa courbe représentative), on a immédiatement :

$$p(-0,7 < X < -0,2) = p(0,2 < X < 0,7)$$

Finalement :

$$p(-0,7 < X < -0,2) = p(0,2 < X < 0,7) \approx 0,178\,777$$

N°51 page 206

Je vous propose la correction de cet exercice car l'énoncé comporte (encore une fois ...) une jolie coquille : la variable aléatoire X désigne en fait le temps réalisé par un marcheur pris au hasard.

Comme nous disposons d'une information fondamentale relative à la variable aléatoire Z (elle suit la loi normale centrée réduite), nous devons nous ramener à des calculs sur cette loi.

1. On cherche ici $p(X < 200)$.

On a :

$$\begin{aligned} p(X < 200) &= p(X - 240 < 200 - 240) = p(X - 240 < -40) \\ &= p\left(\frac{X - 240}{20} < \frac{-40}{20}\right) = p\left(\frac{X - 240}{20} < -2\right) \\ &= p(Z < -2) \\ &\approx 0,022\,750 \end{aligned}$$

La probabilité qu'un participant choisi au hasard ait mis moins de 200 minutes pour effectuer le parcours est d'environ 0,022 750 soit 2,275% .

2. On cherche ici $p(X < 320 | X > 300)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$\begin{aligned} p(X < 320 | X > 300) &= \frac{p(X < 320 \cap X > 300)}{p(X > 300)} = \frac{p(300 < X < 320)}{p(X > 300)} \\ &= \frac{p(300 - 240 < X - 240 < 320 - 240)}{p(X - 240 > 300 - 240)} = \frac{p(60 < X - 240 < 80)}{p(X - 240 > 60)} \\ &= \frac{p\left(\frac{60}{20} < \frac{X - 240}{20} < \frac{80}{20}\right)}{p\left(\frac{X - 240}{20} > \frac{60}{20}\right)} = \frac{p\left(3 < \frac{X - 240}{20} < 4\right)}{p\left(\frac{X - 240}{20} > 3\right)} \\ &= \frac{p(3 < Z < 4)}{p(Z > 3)} \end{aligned}$$

On a : $p(3 < Z < 4) \approx 0,001318$ et $p(Z > 3) \approx 0,001350$. Mais à ce stade du calcul, il serait plutôt malvenu d'effectuer le rapport de ces deux valeurs approchées. Mieux vaut utiliser la fonction NormCD (calculatrices CASIO. On la trouve dans le « Catalog ») deux fois dans un seul calcul :

$$\text{NormCD}(3, 4, 1, 0) / \text{NormCD}(3, 1E99, 1, 0)$$

Petit rappel sur les arguments de cette fonction : on saisit d'abord les bornes inférieures et supérieures (« Lower » et « Upper » lorsque vous utilisez cette fonction via le menu « Statistiques ») puis l'écart type et enfin l'espérance.

On obtient ici : $\frac{p(3 < Z < 4)}{p(Z > 3)} \approx 0,976538$.

Si un participant a mis plus de 300 minutes pour effectuer le parcours,
la probabilité qu'il ait mis moins de 320 minutes est environ égale à 0,976538.

N°57 page 206

A l'aide de la calculatrice (loi normale inverse), on obtient : $t \approx 4,662$.

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(5; 1^2)$ alors : $p(X < t) = 0,3678 \Leftrightarrow t \approx 4,662$.

N°58 page 206

A l'aide de la calculatrice (loi normale inverse), on obtient : $t \approx 6,853$.

Si X suit la loi normale $\mathcal{N}(7,2; 0,5^2)$ alors : $p(X > t) = 0,756 \Leftrightarrow t \approx 6,853$.

Remarques :

- La probabilité fournie (0,756) étant supérieure à 0,5 on s'attendait bien à ce que la valeur de t soit inférieure à l'espérance (faites un dessin de la courbe en cloche !).
- A la calculatrice (CASIO) vous devez faire attention à l'item Tail ! Si la probabilité fournie est celle d'un événement de la forme :
 - $p(X < t)$, vous choisissez « Left ».
 - $p(X > t)$, vous choisissez « Right ».
 - $p(-t < X < t)$, vous choisissez « Central ».

N°60 page 207

Soit N la variable aléatoire désignant la note obtenue à l'examen, cette note ayant été choisie au hasard. D'après l'énoncé, N suit la loi normale $\mathcal{N}(47; 12^2)$.

L'énoncé précise que « la mention très bien est attribuée aux 15% les meilleurs ». Dans le cadre de notre modèle probabiliste, si on note x la note minimale devant être obtenue pour obtenir cette mention, on a : $p(N \geq x) = 15\% = 0,15$.

En utilisant la loi normale inverse à la calculatrice, on obtient : $x \approx 59,437$. En admettant que les notes données sont entières, on conclut finalement :

Pour obtenir la mention très bien, il faut obtenir une note au moins égale à 60.

N°63 page 207

Notons A la variable aléatoire correspondant à l'âge d'apparition des premiers mots. D'après l'énoncé, A suit la loi normale $\mathcal{N}(12,1; 3,4^2)$.

1. a) On cherche ici $p(A < 10)$. A la calculatrice, on obtient : $p(A < 10) \approx 0,268\,404$.
- b) On cherche ici $p(A > 18)$. A la calculatrice, on obtient : $p(A > 18) \approx 0,041\,344$.

c) On cherche ici : $p(8 < A < 16)$.

A la calculatrice, on obtient : $p(8 < A < 16) \approx 0,760\,390$.

2. On cherche ici $p(A < 15 | A > 10)$.

Par définition de la probabilité conditionnelle, on a :

$$p(A < 15 | A > 10) = \frac{p(A < 15 \cap A > 10)}{p(A > 10)} = \frac{p(10 < A < 15)}{p(A > 10)}$$

Comme dans l'exercice 51, nous utilisons deux fois la fonction NormCD (calculatrices CASIO) dans un seul calcul :

$$\text{NormCD}(10, 15, 3.4, 12.1) / \text{NormCD}(10, 1E99, 3.4, 12.1)$$

On obtient ici : $\frac{p(10 < A < 15)}{p(A > 10)} \approx 0,730\,936$.

La probabilité qu'un enfant n'ayant pas prononcé ses premiers mots à l'âge de 10 mois les prononce avant l'âge de 15 mois est environ égale à 0,730 936.