Matrices

Corrigés d'exercices / Version du 29 juillet 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 254 :	N°**4**, **6**	Page 258 :	N°**32**, **33**, **36**, **38**
Page 255 :	N°**9**, **11**, **13**, **14**	Page 261 :	N°**47**
Page 256 :	N°**17**, **20**, **21**	Page 262 :	N°**50**
Page 257 :	N°**24**, **26**, **28**, **29**, **31**	Page 264 :	N°**57**

N°4 page 254

On a classiquement :

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$M \times X = \begin{pmatrix} -10 & 10 \\ 20 & -30 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -10\times 2+10\times 4 \\ 20\times 2+(-30)\times 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix}$$

D'où :

$$\boxed{M \times X = \begin{pmatrix} 20 \\ -80 \end{pmatrix}}$$

N°6 page 254

a) On a d'abord :

$$A+B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 7 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+4 & -1+1 & 3+2 \\ 4+3 & 5+7 & 0+0 \\ 2+(-1) & 1+2 & 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 7 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 7 & 12 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 5\times1+0\times2+5\times4 & 5\times(-2)+0\times3+5\times1 & 5\times1+0\times4+5\times2 \\ 7\times1+12\times2+0\times4 & 7\times(-2)+12\times3+0\times1 & 7\times1+12\times4+0\times2 \\ 1\times1+3\times2+5\times4 & 1\times(-2)+3\times3+5\times1 & 1\times1+3\times4+5\times2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 & -5 & 15 \\ 31 & 22 & 55 \\ 27 & 12 & 23 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\boxed{\left(A+B\right)\times C=\begin{pmatrix}25 & -5 & 15\\ 31 & 22 & 55\\ 27 & 12 & 23\end{pmatrix}}$$

Calculons maintenant $A\times C+B\times C$.

Calcul de $A\times C$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1\times1+\left(-1\right)\times2+3\times4 & 1\times\left(-2\right)+\left(-1\right)\times3+3\times1 & 1\times1+\left(-1\right)\times4+3\times2\\ 4\times1+5\times2+0\times4 & 4\times\left(-2\right)+5\times3+0\times1 & 4\times1+5\times4+0\times2\\ 2\times1+1\times2+4\times4 & 2\times\left(-2\right)+1\times3+4\times1 & 2\times1+1\times4+4\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11 & -2 & 3\\ 14 & 7 & 24\\ 20 & 3 & 14\end{pmatrix}\end{array}$$

Calcul de $B\times C$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 4 & 1 & 2\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 7 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}4\times1+1\times2+2\times4 & 4\times\left(-2\right)+1\times3+2\times1 & 4\times1+1\times4+2\times2\\ 3\times1+7\times2+0\times4 & 3\times\left(-2\right)+7\times3+0\times1 & 3\times1+7\times4+0\times2\\ -1\times1+2\times2+1\times4 & -1\times\left(-2\right)+2\times3+1\times1 & -1\times1+2\times4+1\times2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & -3 & 12\\ 17 & 15 & 31\\ 7 & 9 & 9\end{pmatrix}\end{array}$$

Calcul de $A\times C+B\times C$:

$$A\times C+B\times C=\begin{pmatrix}11 & -2 & 3\\ 14 & 7 & 24\\ 20 & 3 & 14\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}14 & -3 & 12\\ 17 & 15 & 31\\ 7 & 9 & 9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}25 & -5 & 15\\ 31 & 22 & 55\\ 27 & 12 & 23\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\times C+B\times C=\begin{pmatrix}25 & -5 & 15\\ 31 & 22 & 55\\ 27 & 12 & 23\end{pmatrix}}$$

On constate que l'on obtient finalement : $\left(A+B\right)\times C=A\times C+B\times C$.

Remarque : sous réserve que les produits existent, cette égalité est vraie pour toutes matrices A, B et C. Il s'agit de la distributivité de la multiplication sur l'addition des matrices.

b) Dans cette deuxième question, très similaire à la précédente, nous ne posons plus les calculs mais fournissons « seulement » les principaux résultats.

Calcul de $B-C$:

$$B-C=\begin{pmatrix}4&1&2\\3&7&0\\-1&2&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&-2&1\\2&3&4\\4&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&1\\1&4&-4\\-5&1&-1\end{pmatrix}$$

Calcul de $A\times(B-C)$:

$$A\times(B-C)=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&5&0\\2&1&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3&3&1\\1&4&-4\\-5&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&2&2\\17&32&-16\\-13&14&-6\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\times(B-C)=\begin{pmatrix}-13&2&2\\17&32&-16\\-13&14&-6\end{pmatrix}}$$

Calcul de $A\times B$:

$$A\times B=\begin{pmatrix}1&-1&3\\4&5&0\\2&1&4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4&1&2\\3&7&0\\-1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0&5\\31&39&8\\7&17&8\end{pmatrix}$$

La matrice $A\times C$ a été calculée à la question précédente.
On a finalement :

$$A\times B-A\times C=\begin{pmatrix}-2&0&5\\31&39&8\\7&17&8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}11&-2&3\\14&7&24\\20&3&14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-13&2&2\\17&32&-16\\-13&14&-6\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A\times B-A\times C=\begin{pmatrix}-13&2&2\\17&32&-16\\-13&14&-6\end{pmatrix}}$$

On constate que l'on a : $A\times(B-C)=A\times B-A\times C$.

La remarque formulée en fin de première question reste encore valable ici.

N°9 page 255

A la calculatrice, on obtient :

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 4 & 5 & 0\\ 2 & 1 & 4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4 & 1 & 2\\ 3 & 7 & 0\\ -1 & 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 2 & -4\\ 6 & -9 & 6\\ 1 & 0 & 4\end{pmatrix}$$

Le produit n'est pas égal à la matrice identité I_3 et on en déduit immédiatement :

La matrice B n'est pas l'inverse de la matrice A.

N°11 page 255

On veut : $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{I}_2$, soit :

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

On a :

$$\begin{aligned}&\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow&\begin{pmatrix}2a+c & 2b+d\\ 3a+c & 3b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\\ \Leftrightarrow&\begin{cases}2a+c=1\\ 3a+c=0\\ 2b+d=0\\ 3b+d=1\end{cases}\end{aligned}$$

On doit donc résoudre les deux systèmes :

$$\begin{cases}2a+c=1\\ 3a+c=0\end{cases}\text{ et }\begin{cases}2b+d=0\\ 3b+d=1\end{cases}$$

Résolution de $\begin{cases}2a+c=1\\ 3a+c=0\end{cases}$

$$\begin{cases}2a+c=1\\ 3a+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3a+c)-(2a+c)=0-1\\ c=-3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ c=-3a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ c=-3\times(-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\ c=3\end{cases}$$

Résolution de $\begin{cases} 2b+d=0 \\ 3b+d=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} 2b+d=0 \\ 3b+d=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (3b+d)-(2b+d)=1-0 \\ d=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=-2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=-2\times 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ d=-2 \end{cases}$$

En définitive :

$$\boxed{\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}}$$

Remarque : on vérifiera que l'on a bien : $\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\mathrm{I}_2$.

N°13 page 255

a) A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$\mathrm{A}\times\mathrm{B}=\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit $\mathrm{A}\times\mathrm{B}$ n'est pas égal à la matrice I_2.

Fatou a raison, Pierre s'est trompé.

b) A la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}}$$

N°14 page 255

a) Avec : $A=\begin{pmatrix}5 & -2 & 1\\ 0 & 1 & -2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$, on obtient :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{8} & \frac{1}{16} & \frac{3}{16}\\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8}\\ -\frac{1}{8} & -\frac{9}{16} & \frac{5}{16}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ -4 & -2 & 10\\ -2 & -9 & 5\end{pmatrix}$$

b) Avec : $A=\begin{pmatrix}4 & 3 & -1\\ 3 & 2 & 2\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}$, on obtient :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{7}{16} & \frac{13}{16} & -\frac{11}{16}\\ -\frac{5}{16} & \frac{7}{16} & -\frac{1}{16}\end{pmatrix}=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}8 & -8 & 8\\ -7 & 13 & -11\\ -5 & 7 & -1\end{pmatrix}$$

N°17 page 256

a) On a :

$$\begin{cases}2x-3y=4\\ 5x+2y=10\end{cases}\Leftrightarrow A\times X=B \text{ avec } A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}4\\ 10\end{pmatrix}.$$

b) On a :

$$\begin{cases}x+y-z=2\\ -x+y+z=4\\ 2x-y+z=-5\end{cases}\Leftrightarrow A\times X=B \text{ avec } A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \text{ et } B=\begin{pmatrix}2\\ 4\\ -5\end{pmatrix}.$$

c) On a :

$$\begin{cases} x+y=3 \\ y-z=1 \\ -x+z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B} \text{ avec } \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

d) On a :

$$\begin{cases} a-c=2 \\ c+2b=1 \\ b-a=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B} \text{ avec } \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

N°20 page 256

a) On a :

$$(S)\ \begin{cases} -3x+2y=1 \\ 5x-3y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B}$$
$$\text{avec } \mathrm{A}=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

b) A la calculatrice, par exemple, on obtient : $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$(S)\ \begin{cases} -3x+2y=1 \\ 5x-3y=-1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Le système (S) admet pour unique solution le couple $(1\,;2)$.

On aura bien sûr vérifié que le couple obtenu est bien solution de (S) !

N°21 page 256

a) On a :

$$(S)\ \begin{cases} 4x+2y+9z=138 \\ 2x+8y+7z=194 \\ 5x+6y+3z=159 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B}$$

$$\text{avec } \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 2 & 8 & 7 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B}=\begin{pmatrix} 138 \\ 194 \\ 159 \end{pmatrix}.$$

b) A la calculatrice on obtient : $\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{9}{133} & -\frac{24}{133} & \frac{29}{133} \\ -\frac{29}{266} & \frac{33}{266} & \frac{5}{133} \\ \frac{2}{19} & \frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \end{pmatrix}$.

On a alors :

$$(S)\ \begin{cases} 4x+2y+9z=138 \\ 2x+8y+7z=194 \\ 5x+6y+3z=159 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B}=\begin{pmatrix} \frac{9}{133} & -\frac{24}{133} & \frac{29}{133} \\ -\frac{29}{266} & \frac{33}{266} & \frac{5}{133} \\ \frac{2}{19} & \frac{1}{19} & -\frac{2}{19} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 138 \\ 194 \\ 159 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Le système (S) admet pour unique solution le triplet $(9\,;15\,;8)$.

On aura bien sûr vérifié que le triplet obtenu est bien solution de (S) !

N°24 page 257

a) Pour obtenir les pourcentages souhaités, il suffit de diviser chaque émission (i.e. chaque élément de la matrice colonne donnée) par 4 939,7 ou, ce qui est équivalent, de les multiplier par : $\frac{1}{4\,939{,}7}$ puis de multiplier par 100. En définitive :

La matrice colonne $\begin{pmatrix} 958{,}1 \\ 628{,}2 \\ 541{,}5 \\ 527 \end{pmatrix}$ doit être multipliée par $\frac{100}{4\,939{,}7}$.

b) On a donc le calcul :

$$\frac{100}{4\,939{,}7} \times \begin{pmatrix} 958{,}1 \\ 628{,}2 \\ 541{,}5 \\ 527 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{95\,810}{4\,939{,}7} \\ \frac{62\,820}{4\,939{,}7} \\ \frac{54\,150}{4\,939{,}7} \\ \frac{52\,700}{4\,939{,}7} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 19{,}40 \\ 12{,}72 \\ 10{,}96 \\ 10{,}67 \end{pmatrix}$$

Les pourcentages, arrondis au centième, d'émission de gaz à effet de serre de l'Allemagne, du Royaume-Uni, de la France et de l'Italie en 2008 sont donnés par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 19{,}40 \\ 12{,}72 \\ 10{,}96 \\ 10{,}67 \end{pmatrix}$$

N°26 page 257

A la calculatrice ou à la main, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ -28 & 37 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 14 & -21 \\ -28 & 37 \end{pmatrix}$$

Remarque : l'erreur commise, très grossière a consisté, pour obtenir le carré de la matrice, à élever chaque élément de la matrice au carré. Le calcul correct est plus élaboré que ça !

N°28 page 257

On a :

$$\mathrm{B}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \mathrm{B}$$

$$\boxed{\mathrm{B}^2 = \mathrm{B}}$$

A partir du résultat précédent, on établit facilement $\mathrm{B}^3 = \mathrm{B}^2 \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{B} = \mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$ et $\mathrm{B}^4 = \mathrm{B}^3 \times \mathrm{B} = \mathrm{B} \times \mathrm{B} = \mathrm{B}^2 = \mathrm{B}$. Plus généralement (la preuve nécessite, en toute rigueur, un raisonnement par récurrence), pour tout *n* entier naturel non nul : $\mathrm{B}^n = \mathrm{B}$.

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{B}^n = \mathrm{B}}$$

N°29 page 257

a) On a :

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}}$$

b) On a :

$$\mathrm{C} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 9 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\mathrm{C} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 22 & 11 \end{pmatrix}}$$

c) Les matrices A et C ne sont pas égales et la matrice B n'est pas nulle. Pourtant, on a : $\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \mathrm{C} \times \mathrm{B}$. Avec des réels, si *a* et *c* sont différents et *b* non nul alors $a \times b \neq c \times b$. Encore une illustration du caractère parfois déroutant de la multiplication matricielle.

N°31 page 257

Nous calculons A^2 :

$$
\begin{aligned}
A^2 &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^2 \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) & \frac{\sqrt{3}}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ -\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) & -\frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}+\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} \\ -\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{1}{4}+\frac{3}{4} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Comme $A^2 = I_2$, nous pouvons valider l'affirmation de Marie :

La matrice A est égale à sa propre inverse.

N°32 page 258

Pour vérifier le calcul, nous allons multiplier entre elles les matrices $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

On obtient :

$$
\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times\frac{1}{2}-2\times 2 & 2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-2\times 2 \\ \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times 2 & \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}
$$

La matrice inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ n'est donc pas la matrice $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

A la calculatrice, on obtient :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{pmatrix}}$$

N°33 page 258

A la calculatrice, on obtient :

a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

b) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

c) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

d) $(A \times B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = A \times B$

e) $A^{-1} \times B^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -5 \\ 16 & -9 \end{pmatrix}$

f) $B^{-1} \times A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = (A \times B)^{-1} = A \times B$

Remarque : lorsque les matrice A et B sont inversibles et de mêmes dimensions, alors on a l'égalité générale : $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$. On l'aura compris (après tant de calculs et de remarques !) : au niveau de la multiplication matricielle, l'ordre des facteurs est déterminant !

N°36 page 258

a) En notant, d'après l'énoncé, *x*, *y* et *z* les prix unitaires des week-ends pour la période de Noël, celle de Carnaval et pour la période normale, on a, en 2009 :

$$35x + 70y + 78z = 93\,420$$

Pour 2010 et 2011, on obtient respectivement :

$$37x + 82y + 55z = 93\,170 \text{ et } 41x + 106y + 85z = 122\,310$$

D'où le système :

$$(S)\quad\begin{cases}35x+70y+78z=93\,420\\37x+82y+55z=93\,170\\41x+106y+85z=122\,310\end{cases}$$

b) En posant alors :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}35&70&78\\37&82&55\\41&106&85\end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ et }\mathrm{B}=\begin{pmatrix}93\,420\\93\,170\\122\,310\end{pmatrix}$$

on a l'équivalence : $(S)\Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B}$

$$(S)\quad\begin{cases}35x+70y+78z=93\,420\\37x+82y+55z=93\,170\\41x+106y+85z=122\,310\end{cases}\Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B}$$

$$\text{avec } \mathrm{A}=\begin{pmatrix}35&70&78\\37&82&55\\41&106&85\end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\text{ et }\mathrm{B}=\begin{pmatrix}93\,420\\93\,170\\122\,310\end{pmatrix}$$

c) A la calculatrice, on obtient :

$$\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{56}&\frac{61}{560}&-\frac{67}{560}\\-\frac{89}{2128}&-\frac{223}{21280}&\frac{961}{21280}\\\frac{1}{38}&-\frac{3}{76}&\frac{1}{76}\end{pmatrix}$$

Alors :

$$\mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B}\Rightarrow\mathrm{X}=\mathrm{A}^{-1}\times\mathrm{B}=\mathrm{A}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{56}&\frac{61}{560}&-\frac{67}{560}\\-\frac{89}{2128}&-\frac{223}{21280}&\frac{961}{21280}\\\frac{1}{38}&-\frac{3}{76}&\frac{1}{76}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}93\,420\\93\,170\\122\,310\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}520\\640\\390\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}520\\640\\390\end{pmatrix}$$

d) Le prix d'un week-end est donc de :

- 520€ pour la période de Noël.
- 640€ pour la période de Carnaval.
- 390€ pour la période normale.

N°38 page 258

a) Le point $\mathrm{M}(1\,;-2,5)$ appartenant à la courbe $\mathscr{C}$, ses coordonnées vérifient $g(1)=-2,5$, soit $a\times1^3+b\times1^2+c\times1=-2,5$. D'où : $a+b+c=-2,5$.
En raisonnant de façon similaire avec les points N et P, on obtient :

- $a\times2^3+b\times2^2+c\times2=-5$, soit : $8a+4b+2c=-5$.
- $a\times4^3+b\times4^2+c\times4=-4$, soit : $16a+4b+c=-1$.

Les trois équations ainsi obtenues nous donnent finalement le système :

$$(S)\ \begin{cases} a+b+c=-2,5 \\ 8a+4b+2c=-5 \\ 16a+4b+c=-1 \end{cases}$$

b) On pose classiquement :

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\ \text{et}\ \mathrm{B}=\begin{pmatrix} -2,5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

On a alors l'équivalence : $(S)\Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B}$

$$(S)\ \begin{cases} a+b+c=-2,5 \\ 8a+4b+2c=-5 \\ 16a+4b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \mathrm{A}\times\mathrm{X}=\mathrm{B}$$

$$\text{avec}\ \mathrm{A}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \\ 16 & 4 & 1 \end{pmatrix},\ \mathrm{X}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}\ \text{et}\ \mathrm{B}=\begin{pmatrix} -2,5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) A la calculatrice, on obtient :

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ -2 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A\times X=B\Rightarrow X=A^{-1}\times B=A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ -2 & \frac{5}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} -2,5 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} \\ -2 \end{pmatrix}}$$

Il vient donc : $g(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2-2x$.

N°47 page 261

a) Nous notons *x*, *y* et *z* les productions totales (dans l'unité fixée par l'énoncé i.e. le milliard de dollars) des secteurs agricole, manufacturier et des services.
Raisonnons sur le secteur agricole.
L'hypothèse de l'économie équilibrée nous permet d'écrire que la production totale *x* est la somme :

- D'unités du secteur agricole servant à produire *x* : 0,4102*x*.
- D'unités du secteur agricole servant à produire *y* : 0,0,0301*y*.
- D'unités du secteur agricole servant à produire *z* : 0,0257*z*.
- De la demande de la population.

On peut ainsi écrire l'égalité :

$$x=0,4102x+0,0301y+0,0257z+39,24$$

En raisonnant de façon similaire avec la production du secteurs manufacturier et celle du secteur des services, on obtient les deux autres égalités :

$$y = 0,0624x + 0,3783y + 0,1050z + 60,02$$
$$z = 0,1236x + 0,1588y + 0,1919z + 130,65$$

D'où le système :

$$\begin{cases} x = 0,4102x + 0,0301y + 0,0257z + 39,24 \\ y = 0,0624x + 0,3783y + 0,1050z + 60,02 \\ z = 0,1236x + 0,1588y + 0,1919z + 130,65 \end{cases}$$

Pour écrire ce système sous forme matricielle, nous introduisons les matrices suivantes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,4102 & 0,0301 & 0,0257 \\ 0,0624 & 0,3783 & 0,1050 \\ 0,1236 & 0,1588 & 0,1919 \end{pmatrix},\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 39,24 \\ 60,02 \\ 130,65 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$\begin{cases} x = 0,4102x + 0,0301y + 0,0257z + 39,24 \\ y = 0,0624x + 0,3783y + 0,1050z + 60,02 \\ z = 0,1236x + 0,1588y + 0,1919z + 130,65 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{X} = \mathrm{A} \times \mathrm{X} + \mathrm{B} \Leftrightarrow \mathrm{I}_3 \times \mathrm{X} - \mathrm{A} \times \mathrm{X} = \mathrm{B}$$
$$\Leftrightarrow (\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) \times \mathrm{X} = \mathrm{B}$$

L'équilibre de l'économie considérée se traduit par l'égalité matricielle :

$$(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) \times \mathrm{X} = \mathrm{B}$$

$$\text{où : } \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0,4102 & 0,0301 & 0,0257 \\ 0,0624 & 0,3783 & 0,1050 \\ 0,1236 & 0,1588 & 0,1919 \end{pmatrix},\ \mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 39,24 \\ 60,02 \\ 130,65 \end{pmatrix}$$

b) En supposant la matrice $\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}$ inversible, l'égalité $(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}) \times \mathrm{X} = \mathrm{B}$ équivaut à :

$$\mathrm{X} = (\mathrm{I}_3 - \mathrm{A})^{-1} \times \mathrm{B}$$

A la calculatrice, en arrondissant à l'unité, on obtient :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 82 \\ 139 \\ 202 \end{pmatrix}$$

Selon le modèle de Leontief, en 1947 les productions américaines des secteurs agricoles, manufacturier et des services s'élevaient respectivement à 82, 139 et 202 milliards de dollars.

c) Dans cette question, on suppose que la demande de la population pour les biens agricoles est d'une unité supérieure à la situation précédente, les demandes pour les biens manufacturiers et les services étant inchangés.

On aura cette fois : $\mathrm{X} = \left(\mathrm{I}_3 - \mathrm{A}\right)^{-1} \times \mathrm{D}$ avec $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} 40,24 \\ 60,02 \\ 130,65 \end{pmatrix}$.

A la calculatrice, on obtient :

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} 84 \\ 139 \\ 202 \end{pmatrix}$$

On doit ici se méfier de l'effet de l'arrondi qui semble nous faire croire que seule la production de biens agricoles a augmenté, passant de 82 à 84 unités. En fait, toutes les productions ont augmenté (ce qui est tout à fait normal puisque chaque secteur requiert les trois autres pour fournir sa production) mais c'est la production agricole qui a augmenté le plus significativement.

N°50 page 262

Fondamentalement, le calcul matriciel n'a rien à faire ici ! ☺

Le problème général (et tellement classique !) posé est en fait le suivant : si on baisse le prix unitaire d'un produit donné de *t*% et que la quantité vendue augme conséquemment de *t*%, réalisera-t-on un chiffre d'affaires supérieur ou inférieur ?

Notons *p* et *q* respectivement le prix unitaire du produit considéré et la quantité vendue.
Le chiffre d'affaires *R* réalisé vaut alors : $R = p \times q$.

Si maintenant, nous appliquons les variations, le prix unitaire devient $p \times \left(1 - \dfrac{t}{100}\right)$ et la quantité $q \times \left(1 + \dfrac{t}{100}\right)$.
Le nouveau chiffre d'affaires R' vaut alors :

$$p \times \left(1 - \frac{t}{100}\right) \times q \times \left(1 + \frac{t}{100}\right) = \left[1 - \left(\frac{t}{100}\right)^2\right] \times pq = \left[1 - \left(\frac{t}{100}\right)^2\right] \times R$$

Comme $1-\left(\frac{t}{100}\right)^2<1$, on a $R'<R$.
L'« opération » n'est pas intéressante.

L'exercice propose en fait une généralisation de ce résultat.

Notons V la matrice des ventes de sandwiches, frites et boissons pour les jours 1, 2 et 3. Nous avons donc affaire ici à une matrice 3×3. Nous notons également P la matrice des prix unitaires des produits considérés. Il s'agit ici d'une matrice 3×1.

Le produit matriciel nous donne, <u>pour chaque journée</u>, le chiffre d'affaires total réalisé.
Nous notons ce produit C :

$$\mathrm{C}=\mathrm{V}\times\mathrm{P}=\begin{pmatrix}70 & 110 & 225\\ 105 & 135 & 290\\ 65 & 90 & 185\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\ 2,5\\ 1,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}892,5\\ 1192,5\\ 762,5\end{pmatrix}$$

Si l'on souhaite le chiffre d'affaires total T réalisé sur les 3 jours, il suffit d'additionner les éléments de la matrice C. On peut obtenir cette somme en multipliant la matrice C <u>à gauche</u> par la matrice ligne $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}$. On obtient, dans le premier cas :

$$\mathrm{T}=892,5+1192,5+762,5=2847.5$$

Supposons maintenant que les ventes augmentent de 20% suite à une diminution de 20% des prix unitaires. La nouvelle matrice de ventes V' est simplement obtenu à partir de V en multipliant <u>chaque élément</u> de V par $1+20\%=1+\frac{20}{100}=1,2$.
On a donc simplement : $\mathrm{V}'=1,2\mathrm{V}$.
Chaque prix unitaire ayant été diminué de 20%, la nouvelle matrice colonne des prix unitaires s'écrit : $\mathrm{P}'=(1-20\%)\mathrm{P}=\left(1-\frac{20}{100}\right)\mathrm{P}=0,8\mathrm{P}$.
La matrice colonne C' des chiffres d'affaires quotidiens vaut alors :

$$\mathrm{C}'=\mathrm{V}'\times\mathrm{P}'=1,2\mathrm{V}\times 0,8\mathrm{P}=0,96\times\mathrm{VP}=0,96\times\begin{pmatrix}892,5\\ 1192,5\\ 762,5\end{pmatrix}$$

Ainsi, chaque chiffre d'affaire quotidien va être multiplié par 0,96 c'est-à-dire subir une baisse de 4%. On conclura à l'identique avec le chiffre d'affaires global.

N°57 page 264

a) A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5}\\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{1}{5}\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}}$$

b) A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$P^{-1}\times A\times P=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\\ 3 & 3 & -1\\ 2 & -3 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 3 & -1\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}$$

$$\boxed{P^{-1}\times A\times P=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}}$$

c) On constate qu'à la question précédente, on a obtenu : $P^{-1}\times A\times P=D$. On en déduit alors : $P\times\left(P^{-1}\times A\times P\right)\times P^{-1}=\underbrace{P\times P^{-1}}_{=I_3}\times A\times\underbrace{P\times P^{-1}}_{=I_3}=P\times D\times P^{-1}$.

D'où : $A=P\times D\times P^{-1}$.

$$\boxed{P\times D\times P^{-1}=A}$$

d) Comme le suggère l'énoncé, commençons par calculer D^2 puis D^3.

$$D^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^2 \end{pmatrix}$$

Puis :

$$D^3 = D^2 \times D = \begin{pmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^3 \end{pmatrix}$$

Remarquons également que l'on a : $D^0 = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^0 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^0 \end{pmatrix}$.

Les éléments précédents nous conduisent à conjecturer :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}}$$

e) A partir de $D = P^{-1} \times A \times P$, on a :

$$\begin{aligned} D^2 &= \left(P^{-1} \times A \times P\right) \times \left(P^{-1} \times A \times P\right) = P^{-1} \times A \times \underbrace{P \times P^{-1}}_{=I_3} \times A \times P \\ &= P^{-1} \times A \times I_3 \times A \times P = P^{-1} \times A \times A \times P \\ &= P^{-1} \times A^2 \times P \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} D^3 &= D^2 \times D \\ &= \left(P^{-1} \times A^2 \times P\right) \times \left(P^{-1} \times A \times P\right) = P^{-1} \times A^2 \times \underbrace{P \times P^{-1}}_{=I_3} \times A \times P \\ &= P^{-1} \times A^2 \times I_3 \times A \times P = P^{-1} \times A^2 \times A \times P \\ &= P^{-1} \times A^3 \times P \end{aligned}$$

On a également $D^0 = I_3$ et $P^{-1} \times A^0 \times P = P^{-1} \times I_3 \times P = P^{-1} \times P = I_3$.

On peut formuler la conjecture suivante :

$$\mathrm{D}^n = \mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{A}^n \times \mathrm{P}$$

En supposant que cette conjecture soit vraie (je vous confirme qu'elle l'est ! ☺), on a :

$$\mathrm{D}^n = \mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{A}^n \times \mathrm{P} \Leftrightarrow \mathrm{P} \times \mathrm{D}^n \times \mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P} \times \left(\mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{A}^n \times \mathrm{P}\right) \times \mathrm{P}^{-1} = \mathrm{P} \times \mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{A}^n \times \mathrm{P} \times \mathrm{P}^{-1} = \mathrm{A}^n$$

On a donc, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A}^n &= \mathrm{P} \times \mathrm{D}^n \times \mathrm{P}^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2^n & (-3)^n \\ 2^n & 0 & -(-3)^n \\ 3 \times 2^n & -2 \times 2^n & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 0 & 2^n & (-3)^n \\ 2^n & 0 & -(-3)^n \\ 3 \times 2^n & -2^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \times 2^n + 2 \times (-3)^n & 3 \times 2^n - 3 \times (-3)^n & -2^n + (-3)^n \\ 2 \times 2^n - 2 \times (-3)^n & 2 \times 2^n + 3 \times (-3)^n & 2^n - (-3)^n \\ 2 \times 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n+1} & 2 \times 3 \times 2^n - 3 \times 2^{n+1} & 3 \times 2^n + 2^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \times 2^n + 2 \times (-3)^n & 3 \times \left[2^n - (-3)^n\right] & -2^n + (-3)^n \\ 2 \times \left[2^n - (-3)^n\right] & 2^{n+1} - (-3)^{n+1} & 2^n - (-3)^n \\ 0 & 0 & 5 \times 2^n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{A}^n = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 \times 2^n + 2 \times (-3)^n & 3 \times \left[2^n - (-3)^n\right] & -2^n + (-3)^n \\ 2 \times \left[2^n - (-3)^n\right] & 2^{n+1} - (-3)^{n+1} & 2^n - (-3)^n \\ 0 & 0 & 5 \times 2^n \end{pmatrix}}$$

On pourra vérifier que l'expression obtenue pour A^n redonne bien, par exemple :

$$A^0 = I_3, \text{A}, \ A^2 = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 1 \\ -2 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } A^3 = \begin{pmatrix} -6 & 21 & -7 \\ 14 & -13 & 7 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Nous sommes ici dans une situation favorable, l'élément clé étant la possibilité d'écrire (plus « techniquement », on dit « décomposer ») la matrice A sous la forme $P \times D \times P^{-1}$ la matrice D étant une matrice diagonale (d'où l'utilisation, d'ailleurs, de la lettre D). Cette situation est particulièrement favorable puisque le calcul de D^n ne pose pas de problème particulier, les éléments diagonaux étant connus. En revanche deux remarques importantes doivent être faite :

- Toute matrice carrée n'est pas nécessairement décomposable sous la forme $P \times D \times P^{-1}$ (lorsque c'est le cas, on dit que « la matrice A est diagonalisable »). Déterminer si une matrice carrée donnée est diagonalisable est un problème en soi qui est loin d'être simple dans le cas général.
- Même si l'on sait qu'une matrice carrée est diagonalisable, il n'est pas toujours évident, d'obtenir la matrice D …