Polynésie 2001 – TES –Exercice N°1
Corrigé

1. Avec $\mathrm{O}(0\,;0)$ et $\mathrm{A}(-3\,;9)$, le coefficient directeur de la droite (OA) est immédiatement donné par :

$$\frac{9-0}{-3-0}=\frac{9}{-3}=-3$$

$$\boxed{\text{Le coefficient directeur de la droite } (\mathrm{OA}) \text{ est égal à } -3.}$$

2. Commençons par utiliser le résultat de la question précédente. L'énoncé précise que la droite (OA) est la tangente à la courbe représentative de la fonction *f* au point O. On a donc immédiatement : $f\,'(0)=-3$.

   Or, sur le schéma 2, on lit $f\,'(0)=-1$. On l'élimine donc.

   Par ailleurs, l'énoncé précise également qu'au point B d'abscisse 1, la courbe représentative de *f* admet une tangente horizontale, donc de coefficient directeur nul. On a ainsi : $f\,'(1)=0$. Sur le schéma 1 et le schéma 3, cette condition est uniquement satisfaite sur le schéma 3.

$$\boxed{\text{Le schéma 3 correspond à la courbe représentative de la fonction } f\,'.}$$

3. On pose : $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$.

   a. La courbe représentative de la fonction *f* passe par le point $\mathrm{O}(0\,;0)$. On a donc $f(0)=0$. Avec l'expression ci-dessus, on a : $f(0)=d$.

   On en déduit donc : $\boxed{d=0}$, soit : $f(x)=ax^3+bx^2+cx$.

   La courbe représentative de la fonction *f* passe par le point $\mathrm{A}(-3\,;9)$. On a donc : $f(-3)=9$. Soit : $f(-3)=a\times(-3)^3+b\times(-3)^2+c\times(-3)=-27a+9b-3c=9$,

   d'où : $\underline{-9a+3b-c=3}$.

L'expression $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$ donne : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

On a alors : $f'(0) = -3 \Leftrightarrow \boxed{c = -3}$. On a donc : $f'(x) = 3ax^2 + 2bx - 3$ et l'équation $-9a + 3b - c = 3$ se récrit : $-9a + 3b + 3 = 3$, soit : $\underline{-3a + b = 0}$

On a ensuite : $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \underline{3a + 2b - 3 = 0}$.

On doit donc résoudre :

$$\begin{cases} -3a + b = 0 \\ 3a + 2b - 3 = 0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} b = 3a \\ 3a + 2b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ 3a + 2 \times 3a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ 9a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3a \\ a = \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

En définitive, on a : $a = \dfrac{1}{3}$, $b = 1$, $c = -3$ et $d = 0$. D'où :

> Pour tout *x* réel de l'intervalle $[-3\,;3]$, on a :
>
> $$f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x$$

b. Pour tout *x* réel de l'intervalle $[-3\,;3]$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 + 2x - 3 = x^2 + 2x - 3$$

La somme des coefficients étant égale à 0, 1 annule cette fonction polynôme et on a facilement la factorisation : $f'(x) = x^2 + 2x - 3 = (x-1)(x+3)$.

Sur $\mathbb{R}$, on a :

- Pour tout réel *x* de $]-\infty\,;-3[\cup]1\,;+\infty[$, on a : $(x-1)(x+3) > 0$.
- Pour tout réel *x* de $]-3\,;1[$, on a : $(x-1)(x+3) < 0$.
- Pour tout réel *x* de $\{-3\,;1\}$, on a : $(x-1)(x+3) = 0$.

On en déduit :

- Pour tout réel *x* de $]-3\,;1[$, on a : $f'(x) < 0$.
- Pour tout réel x de $]1\,;3[$, on a : $f'(x) > 0$.
- Pour tout réel *x* de $\{-3\,;1\}$, on a : $f'(x) = 0$.

En définitive :

La fonction *f* est strictement décroissante sur l'intervalle $[-3\,;1]$ et strictement croissante sur l'intervalle $[1\,;3]$.

4. La fonction *f* est une fonction polynomiale. Elle est donc continue sur l'intervalle $[-3\,;3]$ et, en particulier, sur l'intervalle $[1\,;2]$. D'après la question précédente, la fonction *f* est strictement croissante sur cet intervalle.
   On a enfin : $f(1)=\frac{1}{3}\times 1^3+1^2-3\times 1=-\frac{5}{3}$ et $f(2)=\frac{1}{3}\times 2^3+2^2-3\times 2=\frac{2}{3}$.
   D'après le théorème de la valeur intermédiaire, lorsque x varie dans l'intervalle $[1\,;2]$, la fonction *f* prend une fois et une seule toutes les valeurs de l'intervalle $\left[-\frac{5}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$.
   Comme $0\in\left[-\frac{5}{3}\,;\frac{2}{3}\right]$, on en déduit qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $[1\,;2]$ (et même $]1\,;2[$), tel que $f(\alpha)=0$.

L'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[1\,;2]$.

En tabulant la fonction *f* avec un pas égal à 0,1 on obtient facilement :
$f(1{,}8)<0<f(1{,}9)$ et on a donc : $1{,}8<\alpha<1{,}9$.
On a ensuite : $f(1{,}8)<f(1{,}85)<0$. On en déduit : $1{,}85<\alpha<1{,}9$.
Finalement : $\alpha\simeq 1{,}9$.

La valeur arrondie à une décimale de α (il s'agit d'une valeur arrondie par excès) est égale à 1,9.