∽ Baccalauréat ES Polynésie juin 2001 ∾

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Toutes les réponses aux questions posées devront être soigneusement justifiées.

La courbe $(\mathcal{C})$ donnée sur l'annexe est la représentation graphique d'une fonction f définie et dérivable sur [- 3 ; 3] dans un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. La courbe $(\mathcal{C})$ vérifie les quatre conditions suivantes :

- elle passe par l'origine O du repère et par le point A(- 3 ; 9) ;
- elle admet au point B d'abscisse 1 une tangente horizontale et elle admet la droite (OA) pour tangente en 0.

1. Quel est le coefficient directeur de la droite (OA) ?
2. L'un des trois schémas numérotés 1, 2 et 3 donnés en annexe est la représentation graphique de la fonction dérivée f' de la fonction f. Indiquez le numéro de ce schéma en précisant les raisons de votre choix.
3. On suppose que f est définie sur [- 3 ; 3] par :

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ où } a,\ b,\ c,\ d \text{ sont des réels.}$$

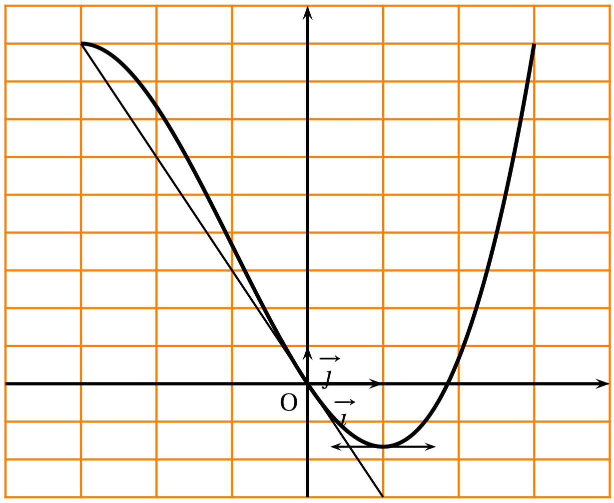
   a. Montrer en utilisant les quatre conditions de départ que :

$$a = \frac{1}{3},\ b = 1,\ c = -3,\ d = 0.$$

   b. On désigne par f'la fonction dérivée de la fonction f. Factoriser $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur$[-3 ; 3]$.

4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ a une solution unique α dans l'intervalle [1 ; 2] et déterminer l'arrondi à une décimale de α.

Annexe



Courbe $(\mathscr{C})$ de f

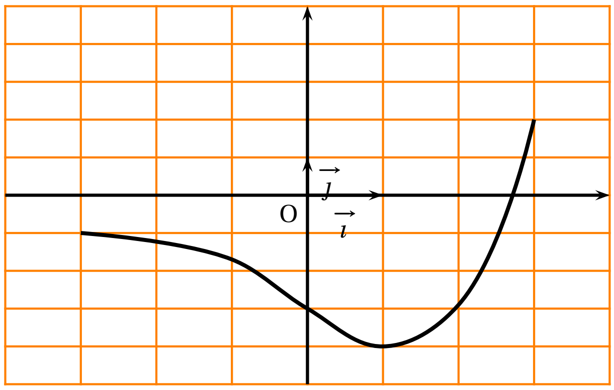


Schéma 1

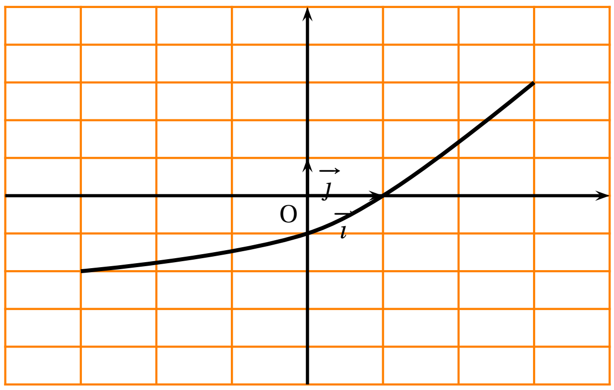


Schéma 2

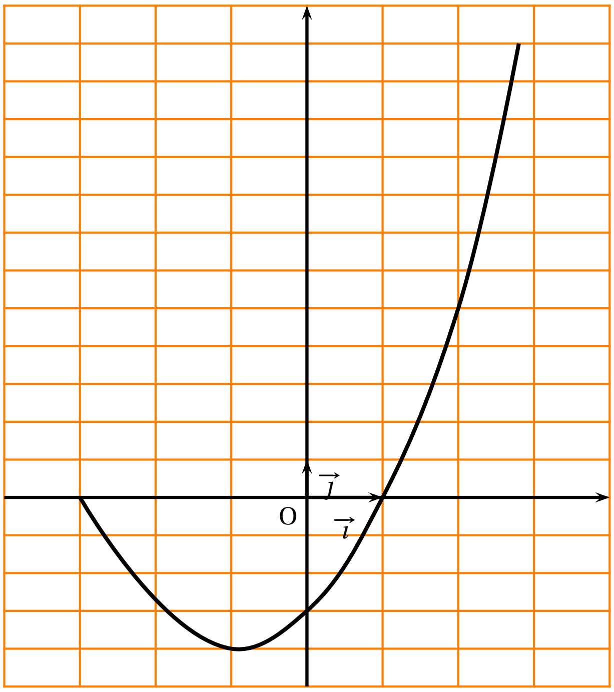


Schéma 3

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Pour tous évènements A et B on note :

- $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A ;
- P(A) la probabilité de l'évènement A ;
- P(A/B) ou $\text{P}_\text{B}(\text{A})$ la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

Les résultats seront donnés sous forme défraction irréductible.

Un club de tennis comporte 500 adhérents : 300 hommes et 200 ferames. Le tennis en compétition est pratiqué par 90 hommes et 40 femmes. Les autres adhérents pratiquent ce sport uniquement pour le loisir. On choisit au hasard un adhérent. On note :

- H l'évènement : « L'adhérent est un homme » ;
- F l'évènement : « L'adhérent est une femme » ;
- C l'évènement : « L'adhérent pratique la compétition ».

1. **a.** Calculer les probabilités P(H), P(F) et $\text{P}_\text{F}(\text{C})$

   b. Décrire l'évènement $\text{C} \cap \text{F}$ et calculer sa probabilité.

   c. Justifier l'égalité suivante : $\text{P(C)} = \dfrac{13}{50}$.

   d. L'adhérent choisi pratique la compétition. Quelle est la probabilité que cet adhérent soit une femme ?

2. Chaque adhérent doit payer une cotisation annuelle de 3 000 F s'il pratique le tennis en compétition et de 2 500 F dans le cas contraire. De plus, pour la saison 2000-2001 une réduction exceptionnelle de 10 % est consentie aux femmes pratiquant la compétition.

   On appelle X la variable aléatoire égale au montant de la cotisation payée par l'adhérent choisi pour la saison 2000-2001.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 2 **5 points**

Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Monsieur A emprunte 40 000 F à un taux de 5 %. Il désire effectuer chaque année, à la date anniversaire de l'obtention du prêt, des remboursements constants de 6 000 F, sauf éventuellement la dernière année où le remboursement pourra être moindre. Ces 6 000 F comprennent le remboursement des intérêts sur le capital dû et un amortissement du capital.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre p d'années nécessaires pour effectuer le remboursement de ce prêt.

Pour tout entier naturel n, on désigne par C_n le capital, exprimé en francs, restant dû après le n-ième remboursement. On a donc : $\mathrm{C}_0 = 40000$ et $\mathrm{C}_1 = 36000$.

1. **a.** Montrer que $\mathrm{C}_2 = 31\,800$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n < p$, l'égalité suivante est vraie :

$$\mathrm{C}_{n+1} = 1,05\mathrm{C}_n - 6000.$$

2. Pour tout entier naturel n tel que $0 \leqslant n < p$ on pose $\mathrm{U}_n = \mathrm{C}_n - \alpha$ où α est un réel.

   a. Déterminer α pour que les nombres U_n soient les termes successifs d'une suite géométrique de raison 1,05 dont on déterminera le premier terme.

   b. En déduire, dans ce cas, l'expression de U_n en fonction de n, puis celle de C_n en fonction de n.

3. Déterminer le plus petit entier n tel que $\mathrm{C}_n < 6000$.

   On appelle cet entier n_0. Calculer alors C_{n_0}, et le montant du (n_0+1)-ième remboursement. Quelle a donc été la durée p du remboursement ? Quel est le montant du remboursement total ? (Les résultats seront arrondis au centime.)

PROBLÈME **10 points**

Partie A

⋆ Étude de deux fonctions

On considère deux fonctions f et g définies sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\mathrm{e}^x + 1}{3} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{8}{2\mathrm{e}^x - 1}.$$

1. **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.

   b. Étudier les variations de f sur $[0~;~+\infty[$.

2. **a.** Déterminer la limite de g en $+\infty$. Interpréter graphiquement ce résultat.

   b. Étudier les variations de g sur $[0~;~+\infty[$.

   c. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0~;~+\infty[$.

3. On désigne par $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f et par (Γ) celle de g, dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ [unité graphique 2 cm].

   a. Déterminer par le calcul les coordonnées du point I commun à $(\mathscr{C})$ et à (Γ).

   b. Déterminer une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

   c. Tracer (T), $(\mathscr{C})$ et (Γ) dans le repère $\left(\mathrm{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$. Faire figurer le point I sur le schéma.

4. **a.** Montrer que $g(x) = -8+16\dfrac{\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x - 1}$ sur $[0~;~+\infty[$. En déduire une primitive G de g sur $[0~;~+\infty[$.

b. On considère l'ensemble des points du plan situés entre (Γ), l'axe $x'x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \ln 5$. Hachurer sur le graphique cette partie du plan et calculer son aire en cm^2. On en donnera une valeur exacte, puis l'arrondi du résultat à 10^{-2}.

Partie B

⋆ **Application économique**

1. *Prix d'équilibre*

Les fonctions f et g précédemment définies dans la **partie A** sont les fonctions d'offre et de demande de la vente d'un produit liquide sur un marché.

Plus précisément :

• $f(v)$ est le prix de vente unitaire proposé par les producteurs du secteur pour un volume v de ce produit ;

• $g(v)$ désigne le prix unitaire accepté par les consommateurs pour la même quantité v de ce produit.

Le volume v est exprimé en m^3 et les prix en milliers de francs.

a. Comment peut-on interpréter, d'un point de vue économique, le sens de variation de la fonction g ?

b. Sur un marché en concurrence pure et parfaite, le prix p_0 qui se forme sur le marché correspond à l'égalité entre l'offre et la demande ; p_0 est le prix d'équilibre. Déterminer le volume v_0 correspondant du liquide arrondi à 10^{-3}, puis déterminer p_0.

2. *Surplus des consommateurs* Tous les consommateurs qui étaient prêts à acheter à un prix supérieur au prix d'équilibre réalisent un gain fictif appelé surplus des consommateurs. On admet que ce gain est mesuré par

$\mathrm{S}_c = \displaystyle\int_0^{v_0} g(v)\,\mathrm{d}v - p_0 v_0$ en milliers de francs.

a. Placer sur le graphique les points $\mathrm{E}(v_0,\ 0)$ et $\mathrm{F}(0,\ p_0)$. Donner une interprétation graphique du surplus des consommateurs.

b. Calculer une valeur exacte du surplus des consommateurs, puis en donner l'arrondi au franc.