
Primitives

Corrigés d'exercices / Version d'octobre 2011

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 96 : N°7, 8, 9, 10

Page 98 : N°31

Page 97 : N°16, 22, 23

N°7 page 96

a) Les primitives de la fonction f sur \mathbb{R} sont les fonctions F de la forme :

$$F: x \mapsto 3 \times \frac{1}{3} x^3 - 2 \times \frac{1}{2} x^2 + x + C = x^3 - x^2 + x + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

$$\begin{aligned} F(0) &= 2 \\ \Leftrightarrow 0^3 - 0^2 + 0 + C &= 2 \\ \Leftrightarrow C &= 2 \end{aligned}$$

En définitive :

La primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f qui vérifie : $F(0) = 2$ est définie par :

$$F: x \mapsto x^3 - x^2 + x + 2$$

b) Les primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions F de la forme :

$$F: x \mapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} x^3 + 3 \times \frac{1}{x} + C = \frac{1}{9} x^3 + \frac{3}{x} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 F(1) &= 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{9} \times 1^3 + \frac{3}{1} + C &= 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + 3 + C = 1 \\
 \Leftrightarrow \frac{28}{9} + C &= 1 \Leftrightarrow C = 1 - \frac{28}{9} \\
 \Leftrightarrow C &= -\frac{19}{9}
 \end{aligned}$$

En définitive :

La primitive F sur $]0; +\infty[$ de la fonction f qui vérifie : $F(1) = 1$ est définie par :

$$F: x \mapsto \frac{1}{9}x^3 + \frac{3}{x} - \frac{19}{9}$$

N°8 page 96

- a) Pour tout x réel de l'intervalle $]-\infty; 0[$, on a : $f(x) = -2x^{-3}$. Les primitives de f sur l'intervalle $]-\infty; 0[$ sont donc de la forme :

$$F: x \mapsto -2 \times \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} + C = x^{-2} + C = \frac{1}{x^2} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

$$\begin{aligned}
 F(-1) &= 2 \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{(-1)^2} + C &= 2 \\
 \Leftrightarrow 1 + C &= 2 \\
 \Leftrightarrow C &= 2 - 1 \\
 \Leftrightarrow C &= 1
 \end{aligned}$$

En définitive :

La primitive F sur $]-\infty; 0[$ de la fonction f qui vérifie : $F(-1) = 2$ est définie par :

$$F: x \mapsto \frac{1}{x^2} + 1$$

b) Les primitives de la fonction f sur $]0; +\infty[$ sont les fonctions F de la forme :

$$F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

$$\begin{aligned} F(2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \times 2^2 + \frac{1}{2} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{1}{2} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow C &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

En définitive :

La primitive F sur $]0; +\infty[$ de la fonction f qui vérifie : $F(2) = 0$ est définie par :

$$F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x} - \frac{5}{2}$$

N°9 page 96

a) Pour tout x réel, on a : $f(x) = x(x^2 + 1)^{-2}$. Posons alors : $u(x) = x^2 + 1$. La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme et on a, pour tout x réel : $u'(x) = 2x$.

On a donc : $f(x) = x(x^2 + 1)^{-2} = \frac{1}{2} \times 2x(x^2 + 1)^{-2} = \frac{1}{2} \times u'(x) \times (u(x))^{-2}$.

Or, la fonction $x \mapsto u'(x) \times (u(x))^{-2}$ admet pour primitive la fonction :

$x \mapsto \frac{1}{-2+1} \times (u(x))^{-2+1} = -(u(x))^{-1} = -\frac{1}{x^2 + 1}$. Les primitives de la fonction f sur \mathbb{R} sont donc les fonctions F de la forme :

$$F: x \mapsto \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2 + 1} \right) + C = -\frac{1}{2(x^2 + 1)} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2(0^2+1)} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + C &= 0 \\ \Leftrightarrow C &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

En définitive :

La primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f qui vérifie : $F(0) = 0$ est définie par :

$$F: x \mapsto -\frac{1}{2(x^2+1)} + \frac{1}{2}$$

- b) Posons : $u(x) = x^3 + 1$. La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme et on a, pour tout x réel : $u'(x) = 3x^2$.

On a donc : $f(x) = x^2(x^3+1) = \frac{1}{3} \times 3x^2(x^3+1) = \frac{1}{3} \times u'(x) \times u(x)$.

Or, la fonction $x \mapsto u'(x) \times u(x)$ admet pour primitive la fonction :

$x \mapsto \frac{1}{1+1} \times (u(x))^{1+1} = \frac{1}{2} (u(x))^2 = \frac{1}{2} (x^3+1)^2$. Les primitives de la fonction f sur \mathbb{R} sont donc les fonctions F de la forme :

$$F: x \mapsto \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} (x^3+1)^2 + C = \frac{1}{6} (x^3+1)^2 + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

$$\begin{aligned} F(-1) &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{6} \left((-1)^3 + 1 \right)^2 + C &= 2 \\ \Leftrightarrow 0 + C &= 2 \\ \Leftrightarrow C &= 2 \end{aligned}$$

En définitive :

La primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f qui vérifie : $F(-1) = 2$ est définie par :

$$F: x \mapsto \frac{1}{6} (x^3+1)^2 + 2$$

N°10 page 96

1. Posons $u(x) = x^2 + 3$. La fonction u est dérivable sur \mathbb{R} en tant que fonction polynôme et on a, pour tout x réel : $u'(x) = 2x$.

$$\text{On a donc : } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

On reconnaît immédiatement dans le rapport $\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ la dérivée de la fonction \sqrt{u} .

Ainsi, les primitives de la fonction f sur \mathbb{R} sont donc les fonctions F de la forme :

$$F : x \mapsto \sqrt{x^2+3} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

$$\begin{aligned} F(-1) &= -1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{(-1)^2+3} + C &= -1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4} + C &= -1 \\ \Leftrightarrow 2 + C &= -1 \\ \Leftrightarrow C &= -3 \end{aligned}$$

En définitive :

La primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f qui vérifie : $F(-1) = -1$ est définie par :

$$F : x \mapsto \sqrt{x^2+3} - 3$$

- b) La fonction f est la somme de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

On reconnaît immédiatement dans la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$ la dérivée de la fonction racine carrée.

Pour ce qui est de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$, posons $u(x) = 4 - x$. On a immédiatement

$$u'(x) = -1. \text{ D'où : } \frac{1}{2\sqrt{4-x}} = -\frac{-1}{2\sqrt{4-x}} = -\frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}.$$

On en déduit immédiatement que la fonction $-\sqrt{u}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{4-x}}$ sur tout intervalle où on a $u > 0$, en particulier sur $]0; 4[$.

D'après ce qui précède, les primitives de la fonction f sur $]0; 4[$ sont donc les fonctions F de la forme :

$$F: x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{4-x} + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

$$\begin{aligned} F(2) &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{4-2} + C &= 1 \\ \Leftrightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} + C &= 1 \\ \Leftrightarrow C &= 1 \end{aligned}$$

En définitive :

La primitive F sur \mathbb{R} de la fonction f qui vérifie : $F(2) = 1$ est définie par :

$$F: x \mapsto \sqrt{x} - \sqrt{4-x} + 1$$

N°16 page 97

1. On a : $F(x) = \frac{(x^2+1)^4}{8} = \frac{1}{8}(u(x))^4$ avec $u(x) = x^2 + 1$.

La fonction F est une fonction polynôme donc dérivable sur \mathbb{R} . On la dérive comme la composée de la fonction u et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{8}x^4$.

Pour tout x réel, on a donc :

$$F'(x) = \frac{1}{8} \times 4 \times u'(x) \times (u(x))^{4-1} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2x \times (x^2+1)^3 = x(x^2+1)^3 = f(x)$$

La fonction F est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R} .

2. On a : $G(x) = \frac{1}{-4(x^4+2)} = [-4(x^4+2)]^{-1} = [u(x)]^{-1}$ avec $u(x) = -4(x^4+2)$.

La fonction G est une fonction rationnelle donc dérivable sur tout intervalle de son domaine de définition. Comme $x^4 + 2 > 0$ pour tout x réel, le domaine de définition de G est \mathbb{R} . On dérive alors, par exemple, G comme la composée de la fonction u et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.

Primitives

Corrections d'exercices / Version d'octobre 2011

Pour tout x réel, on a donc :

$$G'(x) = -\frac{u'(x)}{[u(x)]^2} = -\frac{-4 \times 4x^3}{[-4(x^4 + 2)]^2} = \frac{16x^3}{16(x^4 + 2)^2} = \frac{x^3}{(x^4 + 2)^2} = g(x)$$

La fonction G est une primitive de la fonction g sur \mathbb{R} .

3. Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $3f + 2g$ sera la fonction $3F + 2G$.

Pour tout x réel, on a :

$$\begin{aligned}(3F + 2G)(x) &= 3F(x) + 2G(x) \\ &= 3 \frac{(x^2 + 1)^4}{8} + 2 \frac{-1}{4(x^4 + 2)} \\ &= \frac{3}{8}(x^2 + 1)^4 - \frac{1}{2(x^4 + 2)}\end{aligned}$$

Une primitive sur \mathbb{R} de la fonction $3f + 2g$ est la fonction $3F + 2G$ définie par :

$$3F + 2G : x \mapsto \frac{3}{8}(x^2 + 1)^4 - \frac{1}{2(x^4 + 2)}$$

N°22 page 97

1. D'après le graphique fourni, la courbe représentative de la fonction f passe par les points de coordonnées $(0; 0)$ et $(2; 0)$. On en déduit immédiatement que l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire $ax^2 + bx + c = 0$ admet pour solution 0 et 2.

Ainsi, on peut factoriser le trinôme $ax^2 + bx + c$:

$$ax^2 + bx + c = a(x - 0)(x - 2) = ax(x - 2)$$

Or, la courbe représentative de la fonction f passe également par le point de coordonnées $(1; -3)$ (il s'agit d'ailleurs du sommet de la parabole puisque l'abscisse de ce point est la moyenne arithmétique des racines de f). On a donc : $f(1) = -3$. D'où :

$$f(1) = -3 \Leftrightarrow a \times 1 \times (1 - 2) = -3 \Leftrightarrow -a = -3 \Leftrightarrow a = 3$$

Finalement :

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x \text{ réel :} \\ f(x) &= 3x(x - 2) = 3x^2 - 6x\end{aligned}$$

Primitives

Corrections d'exercices / Version d'octobre 2011

2. On cherche ici la primitive F de f sur \mathbb{R} qui vérifie : $F(1) = -3$.

La fonction f est polynomiale et les primitives de f sur \mathbb{R} sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto 3 \times \frac{1}{3} x^3 - 6 \times \frac{1}{2} x^2 + C = x^3 - 3x^2 + C$$

où C est une constante réelle quelconque.

On a alors :

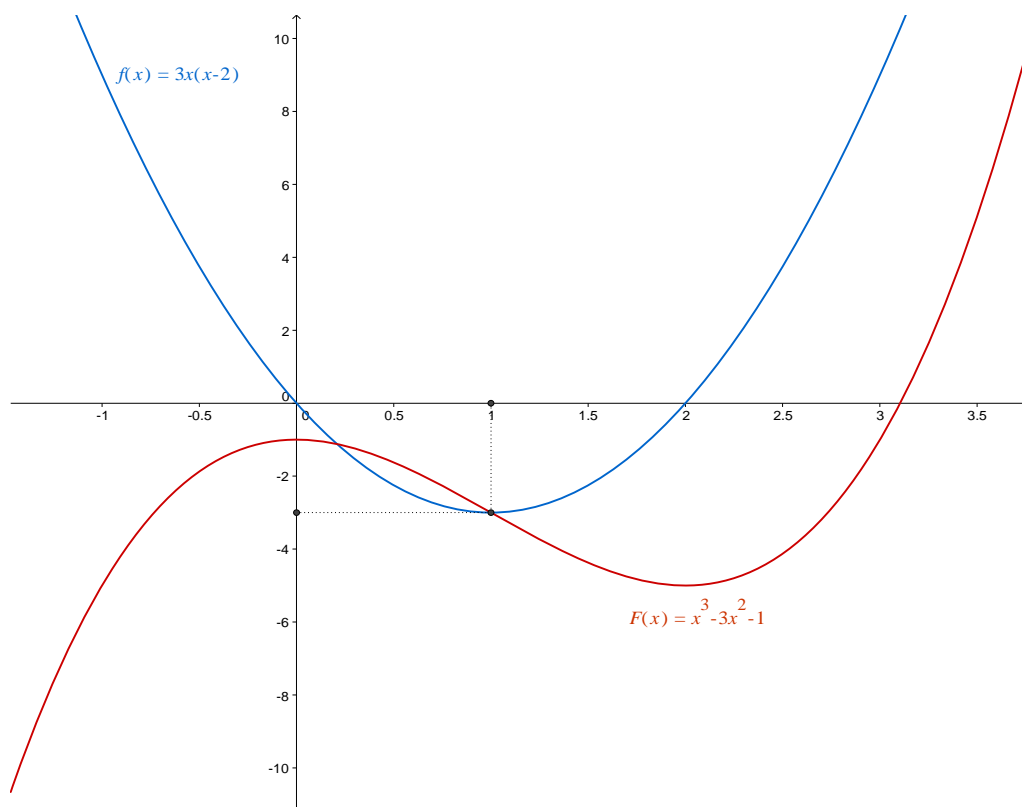
$$\begin{aligned} F(1) &= -3 \\ \Leftrightarrow 1^3 - 3 \times 1^2 + C &= -3 \\ \Leftrightarrow 1 - 3 + C &= -3 \Leftrightarrow 1 + C = 0 \\ \Leftrightarrow C &= -1 \end{aligned}$$

Finalement :

La primitive de la fonction f dont la courbe représentative coupe \mathcal{E}_f en son sommet est la fonction F définie par :

$$F: x \mapsto x^3 - 3x^2 - 1$$

A titre de complément, nous fournissons ci-dessous dans un même repère les courbes représentatives des fonctions f et F .



N°23 page 97

Les fonctions F et G étant deux primitives de la fonction f sur \mathbb{R} , elles diffèrent d'une constante réelle C : $F = G + C$, c'est-à-dire : $\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = G(x) + C$.

En particulier, pour $x = 1$, on a : $F(1) = G(1) + C$, soit : $3 = 5 + C$. D'où : $C = -2$.

Alors : $G(2) = F(2) - C = 4 - (-2) = 4 + 2 = 6$.

Le calcul de C n'était en fait en rien une obligation !

Pour $x = 1$ et $x = 2$, on a respectivement : $F(1) = G(1) + C$ et $F(2) = G(2) + C$.

En soustrayant la première égalité à la seconde, il vient :

$$F(2) - F(1) = G(2) + C - [G(1) + C] = G(2) - G(1)$$

Alors : $G(2) = F(2) - F(1) + G(1) = 4 - 3 + 5 = 6$. On retrouve le résultat obtenu ci-dessus.

N°31 page 98

1. a) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout x réel strictement positif, on a alors :

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2}{3} \left(1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{3} \left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{\sqrt{x} \times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} + \frac{x}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{3} \frac{2x + x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{2}{3} \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, g'(x) = f(x) = \sqrt{x}$$

- b) On déduit immédiatement de ce qui précède :

La fonction g est une primitive de la fonction f sur \mathbb{R}_+^* .

2. a) Pour tout x réel strictement positif, on a, en tenant compte de $g(0) = 0$:

$$\frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{\frac{2}{3}x\sqrt{x}}{x} = \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{g(x) - g(0)}{x} = \frac{2}{3}\sqrt{x}$$

b) Comme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$, il vient immédiatement : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left(\frac{2}{3}\sqrt{x} \right) = 0$.

On en déduit que la fonction g est dérivable en 0 et que l'on a : $g'(0) = 0$.

La fonction g est dérivable en 0 et on a : $g'(0) = 0$.

3. Les résultats précédents nous permettent d'abord de conclure que la fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Ensuite, on a vu, à la question 1. a) que la fonction g admettait la fonction f pour dérivée sur \mathbb{R}_+^* . Mais on vient également de montrer : $g'(0) = 0$. Soit : $g'(0) = 0 = f(0)$.

On déduit de ce qui précède que la fonction g est dérivable sur $[0; +\infty[$ en admettant pour dérivée sur cet intervalle la fonction f .

On en conclut finalement :

La fonction $g : x \mapsto \frac{2}{3}x\sqrt{x}$ est une primitive de la fonction racine carrée sur $[0; +\infty[$.