QCM – Page 210

Question Q1

→ Réponse a
En unités d'aire, l'aire du domaine considéré est égale à :

$$\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 = \frac{1}{3}\times 2^3 - \frac{1}{3}\times 1^3 = \frac{8-1}{3} = \frac{7}{3}$$

L'unité graphique de chaque axe étant de $0,5\text{cm} = \frac{1}{2}\text{cm}$, une unité d'aire correspond donc à un carré de $\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\text{cm}^2 = \frac{1}{4}\text{cm}^2$.

Ainsi, en cm², l'aire du domaine considéré est égale à : $\frac{7}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$.

La réponse b est à rejeter car les bornes de l'intégrale sont inversée.

La réponse c est à rejeter car l'intégrale est multipliée par 4 au lieu de $\frac{1}{4}$.

Question Q2

→ Réponse b
Notons *m* cette valeur moyenne :

$$m = \frac{1}{2-0}\int_0^2 t^3 dt = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}t^4\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\times 2^4 - \frac{1}{4}\times 0^4\right) = \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\times 16 = 2$$

Question Q3

→ Réponse b

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on a :

$$\begin{aligned}\int_1^3\left(\frac{3}{2}f(t)-t\right)dt &= \frac{3}{2}\int_1^3 f(t)\,dt-\int_1^3 t\,dt\\ &= \frac{3}{2}\times 2-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_1^3\\ &= 3-\left(\frac{1}{2}\times 3^2-\frac{1}{2}\times 1^2\right)\\ &= 3-\frac{9-1}{2}\\ &= 3-4\\ &= -1\end{aligned}$$

Question Q4

→ Réponse a

Considérons la fonction $t\mapsto\frac{1}{t^3-t}$.

On a facilement : $t^3-t=t\left(t^2-1\right)=t(t+1)(t-1)$.

Pour tout réel *t* dans l'intervalle $[4\,;5]$, on a :

- $t>0$.
- $t+1\in[5\,;6]$ et donc $t+1>0$.
- $t-1\in[3\,;4]$ et donc $t-1>0$.

Finalement, sur l'intervalle $[4\,;5]$, le produit $t(t+1)(t-1)$ est strictement positif.

Ainsi, la fonction : $t\mapsto\frac{1}{t^3-t}$ prend des valeurs strictement positive sur l'intervalle $[4\,;5]$ et l'intégrale $\int_4^5\frac{1}{t^3-t}dt$ est positive.

Question Q5

→ Réponse c

Comme on a, pour tout réel *t* : $0{,}1\le f(t)\le 1$, il vient : $\int_{-1}^2 0{,}1\,dt\le\int_{-1}^2 f(t)\,dt\le\int_{-1}^2 1\,dt$.

On a : $\int_{-1}^2 1\,dt=[t]_{-1}^2=2-(-1)=3$ et donc : $\int_{-1}^2 0{,}1\,dt=0{,}1\times\int_{-1}^2 1\,dt=0{,}1\times 3=0{,}3$.

On a donc : $0{,}3\le\int_{-1}^2 f(t)\,dt\le 3$.

Question Q6

→ **Réponse c**

En utilisant la relation de Chasles, il vient :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} f(x)\,dx &= \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{1} f(x)\,dx \\ &= \int_{-1}^{0} (-x)\,dx + \int_{0}^{1} x^2 dx \\ &= \left[-\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{1} \\ &= -\frac{1}{2}\times 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\times(-1)^2\right) + \frac{1}{3}\times 1^3 - \frac{1}{3}\times 0^3 \\ &= 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - 0 \\ &= \frac{5}{6}\end{aligned}$$