Suites géométriques

Corrigés d'exercices / Version d'octobre 2012

Les exercices du livre corrigés dans ce document sont les suivants :

Page 19 :	N°**15**	Page 26 :	N°**54**
Page 24 :	N°**29**, **31**, **34**, **35**	Page 27 :	N°**76**, **77**
Page 25 :	N°**39**, **40**, **41**, **44**, **46**, **49**	Page 35 :	N°**102**

N°15 page19

Comme u est la suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme $u_0 = -3$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = -3 \times 1,5^n$$

On a alors, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n \\ &= -3 + (-3) \times 1,5 + (-3) \times 1,5^2 + \ldots + (-3) \times 1,5^n \\ &= -3 \times \left(1 + 1,5 + 1,5^2 + \ldots + 1,5^n\right) \\ &= -3 \times \frac{1 - 1,5^n}{1 - 1,5} \\ &= -3 \times \frac{1,5^n - 1}{0,5} \\ &= -6 \times \left(1,5^n - 1\right) \end{aligned}$$

Comme $1,5 > 1$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} 1,5^n = +\infty$. Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1,5^n - 1\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left[-6 \times \left(1,5^n - 1\right)\right] = -\infty$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} S_n = -\infty}$$

N°29 page 24

a) Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 2^n = 1 \times 2^n$.
On en déduit immédiatement :

> La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 2$.

b) Pour tout entier naturel n, on a : $u_n = 3^n = 1 \times 3^n$.

On en déduit immédiatement :

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $q = 3$.

c) Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = \frac{5}{4^n} = 5\times\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

On en déduit immédiatement :

La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $q = \frac{1}{4}$.

N°31 page 24

a) La suite (u_n) est ici arithmétique (de premier terme $u_0 = 0$ et de raison $r = 3$).

b) La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 2 > 0$ et de raison $q = 1,2 > 1$. Elle est donc strictement croissante.

N°34 page 24

a) Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = 2\times\frac{3^{n+1}}{5^n} = 2\times\frac{3\times 3^n}{5^n} = 6\times\frac{3^n}{5^n} = 6\times\left(\frac{3}{5}\right)^n$. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = 6 > 0$ et de raison $q = \frac{3}{5} \in \left]0\,;1\right[$. Elle est donc strictement décroissante.

b) Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_n = 2\times\frac{3^{n+1}}{5} = 2\times\frac{3\times 3^n}{5} = \frac{6}{5}\times 3^n$. La suite (u_n) est géométrique de premier terme $u_0 = \frac{6}{5} > 0$ et de raison $q = 3 > 1$. Elle est donc strictement croissante.

N°35 page 24

a) Comme une augmentation annuelle de 4% correspond à une multiplication des prix par $1 + 4\% = 1 + 0,04 = 1,04$, on peut introduire la suite *u* définie comme suit :

$$u_n = 0,85\times 1,04^n$$

$u_0 = 0,85$ désigne le prix moyen en euros de la baguette en 2011 et u_n désigne le prix moyen en euros l'année $2011 + n$.

Nous avons ainsi affaire à une suite géométrique de premier terme $u_0 = 0,85$ et de raison $q = 1,04$.

b) L'année 2015 correspond au rang $n = 2015 - 2011 = 4$. En utilisant le modèle de la question précédente, on obtient :

$$u_4 = 0,85 \times 1,04^4 \simeq 0,99$$

Avec ce modèle, le prix moyen de la baguette serait d'environ 99 centimes.

N°39 page 25

On a $u_{20} = u_0 \times q^{20} = 5 \times 1,5^{20} = \boxed{16\,626,28\,365}$

N°40 page 25

On a : $u_{12} = u_4 \times q^{12-4} = u_4 \times q^8 = 5 \times 0,9^8 = \boxed{2,152\,336\,05}$

N°41 page 25

$u_{10} = u_{20} \times q^{10-20} = u_{20} \times q^{-10} = 100 \times 1,1^{-10} = \boxed{38,554\,328\,94}$

N°44 page 25

a) Pour tout entier naturel *n*, on a : $u_{n+1} - u_n = u_0 \times q^{n+1} - u_0 \times q^n = u_0 \times q^n \times (q-1)$.
On a $u_0 > 0$ et $q > 0$. On en déduit : $u_0 \times q^n > 0$. Par ailleurs, $q = 2$, donc $q - 1 = 1 > 0$.
En définitive : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite est donc strictement croissante.

b) Pour déterminer le rôle de cet algorithme, on peut le faire « tourner à la main ».
Initialement, la variable *u* se voir affecter la valeur 0,5 c'est-à-dire la valeur initiale de la suite … *u*.
La valeur initiale de la variable *n* vaut 0.

Nous entrons alors dans une boucle de type « TANT QUE … ».

Notons d'abord que le contenu de cette boucle est exécuté tant que la valeur de la variable *u* est strictement inférieure à 100.

La boucle comporte deux calculs : la valeur courante de la variable *u* est d'abord multipliée par 2 puis la valeur de la variable *n* est augmentée de 1.
La boucle met donc en œuvre la relation de récurrence : $u_{n+1} = 2 \times u_n$.

La boucle s'exécutera tant que la variable *u* est strictement inférieure à 100.

Pour simuler le fonctionnement de l'algorithme, nous pouvons fournir le tableau suivant :

N° de passage dans la boucle	Valeur de *u* à l'entrée	Valeur de *n* à l'entrée	Valeur de *u* à la sortie	Valeur de *n* à la sortie
1	0,5	0	1	1
2	1	1	2	2
3	2	2	4	3
4	4	3	8	4
5	8	4	16	5
6	16	5	32	6
7	32	6	64	7
8	64	7	128	8

Il y aura donc 8 passages dans la boucle et comme à l'issue du 8$^{\text{ème}}$ passage la valeur de *u* vaudra 128, la valeur de *n* finalement affichée sera 8.

L'algorithme a ainsi calculé $u_8 = 0,5 \times 2^8 = 128$ qui est la plus petite valeur de u_n telle que $u_n \geq 100$. Ainsi, l'algorithme proposé détermine le plus petit rang *n* tel que $u_n \geq 100$.

L'algorithme détermine le plus petit rang *n* tel que $u_n \geq 100$

De façon « symétrique », en retranchant 1 à la valeur de *n* finalement affichée par l'algorithme, on obtient le rang de la grande valeur de u_n strictement inférieure à 100.

c) Nous fournissons ci-dessous l'algorithme tel que codé à l'aide d'AlgoBox (entraînez-vous à le saisir tel que, ce sera déjà une excellente façon de prendre en main ce logiciel !).

```
VARIABLES
        U EST_DU_TYPE NOMBRE
        N EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
U PREND_LA_VALEUR 0.5
N PREND_LA_VALEUR 0
TANT_QUE (U<100) FAIRE
        DEBUT_TANT_QUE
                U PREND_LA_VALEUR U*2
                N PREND_LA_VALEUR N+1
        FIN_TANT_QUE
AFFICHER N
FIN_ALGORITHME
```

En exécutant cet algorithme, on obtient comme affichage final la valeur 8, conforme à l'analyse de la seconde question.

N°46 page 25

a) On note P_n le prix de l'action à la fin de la *n*-ième journée à la clôture. $P_0 = 30$ est le prix initial de l'action considérée.
Comme l'action perd quotidiennement 2% de sa valeur, chaque journée correspond donc à une multiplication du prix de l'action par $1-2\% = 98\% = 0,98$.
On a donc la relation de récurrence : $P_{n+1} = 0,98P_n$.

Le prix de l'action en fin de journée à la clôture peut être modélisé par une suite géométrique de raison 0,98 et de premier terme 30.

b) A l'aide d'un programme calculant les N premiers termes d'une suite géométrique (ou, plus généralement d'une suite arithmético-géométrique … cf. les algorithmes disponibles sur panamaths.net), on obtient facilement : $P_{34} \simeq 15,09$ et $P_{35} \simeq 14,79$.

Le cours de cette action passera sous les 15€ au cours de la 35ème journée.

N°49 page 25

a) En mettant 5 en facteur, nous obtenons :

$$\begin{aligned}5+5\times 0,2+5\times 0,2^2+\ldots+5\times 0,2^{10} &= 5\times\left(1+0,2+0,2^2+\ldots+0,2^{10}\right)\\ &= 5\times\frac{1-0,2^{11}}{1-0,2}\end{aligned}$$

En remarquant que $0,2=\dfrac{1}{5}$, il vient :

$$\begin{aligned}5+5\times 0,2+5\times 0,2^2+\ldots+5\times 0,2^{10} &= 5\times\frac{1-0,2^{11}}{1-0,2} = 5\times\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{11}}{1-\frac{1}{5}}\\ &= 5\times\frac{1-\frac{1}{5^{11}}}{\frac{4}{5}} = 5\times\frac{5}{4}\times\frac{5^{11}-1}{5^{11}}\\ &= \frac{5^{11}-1}{4\times 5^9}\end{aligned}$$

En effectuant la remarque « $0,2=\frac{1}{5}$ » dès le début, on a :

$$\begin{aligned}
5+5\times\frac{1}{5}+5\times\left(\frac{1}{5}\right)^2+...+5\times\left(\frac{1}{5}\right)^{10} &= 5+1+5\times\frac{1}{5^2}+...+5\times\frac{1}{5^{10}} \\
&= 5+1+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{5^9}=5+1+\frac{1}{5}+...+\left(\frac{1}{5}\right)^9 \\
&= 5+\frac{1-\left(\frac{1}{5}\right)^{10}}{1-\frac{1}{5}}=5+\frac{1-\frac{1}{5^{10}}}{\frac{4}{5}}=5+\frac{5}{4}\times\frac{5^{10}-1}{5^{10}} \\
&= 5+\frac{5^{10}-1}{4\times5^9}=\frac{5\times4\times5^9}{4\times5^9}+\frac{5^{10}-1}{4\times5^9} \\
&= \frac{4\times5^{10}+5^{10}-1}{4\times5^9}=\frac{5\times5^{10}-1}{4\times5^9} \\
&= \frac{5^{11}-1}{4\times5^9}
\end{aligned}$$

On retrouve le même résultat que précédemment.

$$\boxed{5+5\times0,2+5\times0,2^2+...+5\times0,2^{10}=\frac{5^{11}-1}{4\times5^9}=\frac{48\,828\,124}{7\,812\,500}=\frac{12\,207\,031}{1\,953\,125}}$$

b) En procédant comme précédemment :

$$\begin{aligned}
0,8+0,8\times1,3+0,8\times1,3^2+...+0,8\times1,3^{15} &= 0,8\times\left(1+1,3+1,3^2+...+1,3^{15}\right) \\
&= 0,8\times\frac{1-1,3^{15}}{1-1,3}=0,8\times\frac{1,3^{15}-1}{0,3} \\
&= \frac{8}{3}\left(1,3^{15}-1\right) \\
&\simeq 133,829\,048
\end{aligned}$$

$$\boxed{0,8+0,8\times1,3+0,8\times1,3^2+...+0,8\times1,3^{15}=\frac{8}{3}\left(1,3^{15}-1\right)\simeq133,829\,048}$$

c) Encore et encore … ☺

$$4+\frac{4}{3}+\frac{4}{3^2}+...+\frac{4}{3^{10}}=4\times\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^{10}}\right)=4\times\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+...+\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\right)$$

$$=4\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{11}}{1-\frac{1}{3}}=4\frac{1-\frac{1}{3^{11}}}{\frac{2}{3}}=4\times\frac{3}{2}\times\left(\frac{3^{11}-1}{3^{11}}\right)$$

$$=2\times\frac{3^{11}-1}{3^{10}}$$

$$\simeq 5{,}999\ 966$$

$$\boxed{4+\frac{4}{3}+\frac{4}{3^2}+...+\frac{4}{3^{10}}=2\times\frac{3^{11}-1}{3^{10}}\simeq 5{,}999\ 966}$$

d) Attention au petit « piège » …

$$1+\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+...+\frac{7}{10^8}=1+\frac{7}{10}\times\left(1+\frac{1}{10}+...+\frac{1}{10^7}\right)$$

$$=1+\frac{7}{10}\times\frac{1-\frac{1}{10^8}}{1-\frac{1}{10}}=1+\frac{7}{10}\times\frac{\frac{10^8-1}{10^8}}{\frac{9}{10}}$$

$$=1+\frac{7}{10}\times\frac{10}{9}\times\frac{10^8-1}{10^8}=1+7\times\frac{10^8-1}{9\times10^8}$$

$$=\frac{9\times10^8}{9\times10^8}+7\times\frac{10^8-1}{9\times10^8}=\frac{9\times10^8+7\times10^8-7}{9\times10^8}$$

$$=\frac{16\times10^8-7}{9\times10^8}$$

$$=1{,}777\ 777\ 77$$

Résultat finalement assez évident si l'on regarde plus attentivement le calcul initial :

$$1+\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+...+\frac{7}{10^8}=1+0{,}7+0{,}07+...+0{,}000\ 000\ 07$$

$$\boxed{1+\frac{7}{10}+\frac{7}{10^2}+...+\frac{7}{10^8}=\frac{16\times10^8-7}{9\times10^8}=1{,}777\ 777\ 77}$$

N°54 page 26

a) Comme $0 < 221 < 222$, on a immédiatement $0 < \frac{221}{222} < 1$ et donc : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{221}{222} \right)^n = 0$.

Il vient alors : $\lim_{n \to +\infty} \left[3 \times \left(\frac{221}{222} \right)^n \right] = 0$, soit :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = 0}$$

b) Pour tout n entier naturel, on a : $v_n = \frac{4}{7^n} = 4 \times \frac{1}{7^n} = 4 \times \left(\frac{1}{7} \right)^n$.

Comme on a $0 < \frac{1}{7} < 1$, il vient immédiatement : $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n = 0$ puis : $\lim_{n \to +\infty} \left[4 \times \left(\frac{1}{7} \right)^n \right] = 0$.

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} v_n = 0}$$

N°76 page 27

a) Pour tout entier naturel *n*, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 8 = 0,5u_n + 4 - 8 = 0,5u_n - 4 = 0,5\left(u_n - 8\right) = 0,5v_n$$

On en déduit immédiatement :

La suite $\left(v_n\right)$ est géométrique de raison 0,5.

b) D'après le résultat de la question précédente, on a pour tout entier naturel *n* :

$$v_n = v_0 \times 0,5^n$$

Or, on a : $v_0 = u_0 - 8 = 3 - 8 = -5$. D'où : $v_n = -5 \times 0,5^n$.
Comme $v_n = u_n - 8$, il vient : $u_n = v_n + 8 = -5 \times 0,5^n + 8$.

Pour tout entier naturel *n*, on a : $v_n = -5 \times 0,5^n$ et $u_n = -5 \times 0,5^n + 8$

c) Pour tout n entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1}-u_n &= -5\times 0,5^{n+1}+8-\left(-5\times 0,5^n+8\right) \\ &= -5\times 0,5^{n+1}\cancel{+8}+5\times 0,5^n\cancel{-8} \\ &= 5\times 0,5^n\times\left(1-0,5\right) \\ &= 5\times 0,5^n\times 0,5 \\ &= 5\times 0,5^{n+1} \end{aligned}$$

On a donc : $u_{n+1}-u_n$.

La suite u est strictement croissante.

d) Comme on a $0<0,5<1$, il vient $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^n=0$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-5\times 0,5^n\right)=0$ et enfin :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(-5\times 0,5^n+8\right)=\lim_{n\to+\infty}u_n=8$$

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=8$$

N°77 page 27

1. Puisque 10% des abonnés d'une année donnée ne se réabonnent pas, 90% se réabonnent !
Il vient donc, les nombres d'abonnés étant exprimés en milliers :

$$u_1=0,9u_0+20=0,9\times 500+20=450+20=470$$
$$u_2=0,9u_1+20=0,9\times 470+20=423+20=443$$

$u_1=470$ et $u_2=443$

2. La généralisation du calcul précédent s'écrit directement :

$$u_{n+1}=0,9u_n+20$$

3. a) pour tout entier naturel *n*, on a :

$$v_{n+1}=u_{n+1}-200=0,9u_n+20-200=0,9u_n-180=0,9\left(u_n-200\right)=0,9v_n$$

On en déduit ainsi immédiatement que :

La suite $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique de raison 0,9.

b) D'après le résultat précédent, on a, pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times 0,9^n$.

Or : $v_0 = u_0 - 200 = 500 - 200 = 300$. Donc : $v_n = 300 \times 0,9^n$.

Comme $v_n = u_n - 200$, il vient : $u_n = v_n + 200 = 300 \times 0,9^n + 200$.

Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = v_0 \times 0,9^n$ et $u_n = 300 \times 0,9^n + 200$

4. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 300 \times 0,9^{n+1} + 200 - \left(300 \times 0,9^n + 200\right) \\ &= 300 \times 0,9^{n+1} \cancel{+200} - 300 \times 0,9^n \cancel{-200} \\ &= 300 \times 0,9^n \times (0,9 - 1) \\ &= 300 \times 0,9^n \times (-0,1) \\ &= -30 \times 0,9^n \end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n < 0$ et on en conclut :

La suite (u_n) est strictement décroissante.

Le nombre d'abonnés à ce site de jeu vidéo décroît année après année.

5. Comme $0 < 0,9 < 1$, on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,9^n = 0$ puis $\lim\limits_{n \to +\infty} 300 \times 0,9^n = 0$ et enfin : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 200$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 200$

A long terme, le nombre d'abonnés de ce site sera proche de 200 000 et se stabilisera à cette valeur (ou dans la pratique, à une valeur proche)..

N°102page 35

Notons, dans un premier temps que la période considérée (2 ans) comporte un total de 24 mois.
Notons alors V_0 le nombre initial de vampires. On a, d'après l'énoncé : $V_0 = 1$.
Plus généralement, nous notons V_n le nombre de vampires à la fin du mois n.
On cherche donc ici V_{24}.

Un mois donné, chaque vampire se nourrit d'un humain devenant lui-même un vampire.
Ainsi, le nombre de vampires à l'issue de ce mois aura doublé !

De fait, la suite (V_n) est une suite géométrique de raison 2 et on a, pour tout entier naturel n :

$$V_n = V_0 \times 2^n = 2^n$$

En particulier pour $n = 24$: $V_{24} = 2^{24} = 16\ 777\ 216$.

$$\boxed{\text{Au 31 décembre 1602, la population de vampires s'élèvera à 16 777 216 individus.}}$$

Bon sang … !