

Terminales ES1/ES2 – Spécialité Mathématiques

Année scolaire 2006-2007

Devoir Maison

Un raisonnement faux. A vous de trouver l'erreur !

Considérons la proposition suivante :

« Si un groupe de personnes contient une femme alors il ne contient que des femmes ».

Cette affirmation est manifestement fausse et votre classe en est un magnifique contre-exemple ! Pour autant, le raisonnement suivant vise à démontrer le contraire :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, nous notons P_n la proposition suivante :

« Si un groupe de n personnes contient une femme, alors il contient n femmes »

La proposition P_1 est vraie, sans discussion possible : un « groupe » d'une femme contient bien ... une femme !

Supposons que la proposition P_n soit vraie.

Nous considérons alors un groupe de $n+1$ personnes contenant au moins une femme. Nous notons A_1, A_2, \dots, A_n et F les personnes de ce groupe. F désignant la femme dont l'existence est assurée.

Le groupe constitué de A_1, A_2, \dots, A_{n-1} et F est un groupe de n personnes. D'après l'hypothèse de récurrence, il ne contient donc que des femmes. A_1, A_2, \dots et A_{n-1} désignent donc des femmes (A_n n'apparaît pas).

De façon analogue, A_2, A_3, \dots, A_n et F est un groupe de n personnes. D'après l'hypothèse de récurrence, il ne contient que des femmes. A_2, A_3, \dots et A_n désignent donc des femmes.

De ce qui précède, on déduit que A_1, A_2, \dots et A_n sont des femmes.

Le groupe de $n+1$ personnes ne contient que des femmes. La propriété est établie au rang $n+1$.

Finalement, la proposition P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 ...

Quelque chose cloche ! Mais quoi ? A vous de trouver !

Un jeu de dé ...

Trois amis, Antoine, Bernard et Christophe jouent au jeu suivant avec un dé à 6 faces parfaitement équilibré :

Antoine lance le dé. Si le 6 sort, il a gagné et la partie s'arrête. Si une autre face apparaît, il passe le dé à Bernard. Celui-ci lance alors le dé. Si le 6 sort, il a gagné et la partie s'arrête. Si une autre face apparaît, il passe le dé à Christophe. Celui-ci lance alors le dé. Si le 6 sort, il a gagné. Si une autre face apparaît, il passe le dé à Antoine ... et ainsi de suite.

On définit les événements suivants :

- AG : « Antoine gagne la partie » ;
- BG : « Bernard gagne la partie » ;
- CG « Christophe gagne la partie ».

Le but de cet exercice est de déterminer les probabilités $p(AG)$, $p(BG)$ et $p(CG)$ de ces événements.

Dans la suite, les lettres A, B et C désigneront respectivement Antoine, Bernard et Christophe. Bien qu'il ne soit pas demandé, un arbre pondéré peut vous être utile.

1. Soit A_1 l'événement « A gagne au premier tour ». Calculer $p(A_1)$;
2. Soit A_2 l'événement « A gagne au second tour ». Montrer que $p(A_2) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 \times \frac{1}{6}$;
3. Montrer par récurrence que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p(A_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)} \times \frac{1}{6}$. En déduire que la suite $(p(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique (on précisera son premier terme et sa raison) ;
4. On note AG_n l'événement « A gagne au 1^{er} tour ou au second tour ou ... ou au n ème tour ». On note S_n la probabilité de cet événement.
Montrer que l'on a :
$$S_n = \sum_{k=1}^n p(A_k) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \dots + \frac{1}{6} \times \left(\frac{5}{6}\right)^{3(n-1)}$$
5. Donner une expression simplifiée de S_n ;
6. On admet que $p(AG) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Calculer $p(AG)$;
7. On procédant de façon analogue, montrer que l'on a : $p(BG) = \frac{30}{91}$ et $p(CG) = \frac{25}{91}$;
8. **Bonus** : généraliser les résultats précédents en imaginant le même jeu joué par m joueurs au lieu de 3.