

La calculatrice est autorisée.
Le sujet comporte un total de 4 exercices.
Le barème est fourni à titre indicatif.

EXERCICE 1 [7 points] *d'après le bac sept 2011 Polynésie*

Dans une ville, une enquête portant sur les habitudes des ménages en matière d'écologie a donné les résultats suivants :

- 70% des ménages pratiquent le tri sélectif ;
- parmi les ménages pratiquant le tri sélectif, 40% consomment des produits bio.
- parmi les ménages ne pratiquant pas le tri sélectif, 10% consomment des produits bio.

On choisit un ménage au hasard (tous les ménages ayant la même probabilité d'être choisis) et on note :

T l'évènement « le ménage pratique le tri sélectif » et \bar{T} son évènement contraire.

B l'évènement « le ménage consomme des produits bio » et \bar{B} son évènement contraire.

Les résultats seront donnés sous forme décimale

1. **a.** Donner sans justification la probabilité $p(T)$ de l'évènement T .
b. Donner sans justification $p_{\bar{T}}(B)$ et $p_T(\bar{B})$.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
3. **a.** Calculer la probabilité de l'évènement : « le ménage pratique le tri sélectif et consomme des produits bio ».
b. Montrer que la probabilité que le ménage consomme des produits bio est égale à 0,31.
4. Calculer la probabilité que le ménage pratique le tri sélectif sachant qu'il consomme des produits bio (le résultat sera donné sous forme décimale arrondie au centième).
5. Les évènements T et B sont-ils indépendants ? Justifier.
6. Calculer la probabilité de l'évènement $(T \cup B)$ puis interpréter ce résultat.
7. Cette ville décide de valoriser les ménages ayant un comportement éco-citoyen. Pour cela, elle donne chaque année un chèque de 20 € aux ménages qui pratiquent le tri sélectif et un chèque de 10 € aux ménages qui consomment des produits bio sur présentation de justificatifs (les deux montants peuvent être cumulés). Soit S la somme d'argent reçue par un ménage.
a. Quelles sont les différentes valeurs que peut prendre S ? (on n'attend pas de justification).
b. Donner la loi de probabilité de S .
c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi et interpréter ce résultat.

8. On interroge au hasard et de façon indépendante trois acquéreurs parmi tous les ménages de cette ville. Soit Y le nombre de clients qui achète des produits bio.
- Etablir la loi de probabilité suivie par Y .
 - Calculer la probabilité, qu'exactement deux des trois ménages consomment des produit bio.
 - Calculer la probabilité, qu'au moins un des trois ménages consomment des produits bio.
 - Déterminer l'espérance de cette loi et interpréter.

EXERCICE 2 (QCM) [3 points]

- L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \ln\left(\frac{1-x^2}{x^2-4}\right)$ est :
 - $]-2; -1] \cup [1; 2[$
 - $]-2; -1[\cup]1; 2[$
 - $]0; +\infty[$
 - $[0; +\infty[$
- Pour tout x réel non nul, on a : $\ln(x^2) = \dots$
 - $2\ln x$
 - $(\ln x)^2$
 - $2\ln|x|$
 - $\ln(\ln(x))$
- La dérivée de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x^2 + 3)$ est la fonction définie par :
 - $x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 3}$
 - $x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$
 - $x \mapsto \frac{1}{2x}$
 - $x \mapsto \frac{1}{2x + 3}$
- La tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse $x = e^2$ admet pour équation réduite :
 - $y = 2x - 2e^2 - \frac{1}{e^2}$
 - $y = 2x - 2e^2 + \frac{1}{e^2}$
 - $y = \frac{1}{e^2}x$
 - $y = \frac{1}{e^2}x + 1$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln\left(x(\ln(x) + 1) + \sqrt{x + e^2}\right) = \dots$
 - $-\infty$
 - 0
 - 1
 - $\ln(1 + e)$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x^2 + x - 3}{2x^2 - 3}\right) = \dots$
 - $-\infty$
 - 0
 - $+\infty$
 - $-\ln 2$

EXERCICE 3 [4 points]

Résoudre dans \mathbb{R} les (in)équations suivantes :

- $\ln(x - 2) + \ln(x - 3) = 0$
- $2\ln x \leq 5$
- $\ln(x - 1) - \ln 3 \leq 0$
- $(\ln x + 1)(\ln x - 1) = 0$

EXERCICE 4 [6 points]

Partie A

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = x + 1 + \ln x$$

1. Donner le domaine de définition de la fonction g .
2. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son domaine de définition.
3. Etudier les variations de la fonction g .
4. Montrer que la fonction g s'annule pour une unique valeur α puis en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
5. Préciser le signe de la fonction g sur son domaine de définition.

Partie B

On considère maintenant la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x \ln x}{x + 1}$$

On note \mathcal{C}_f sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

6. Donner le domaine de définition de la fonction f .
7. Montrer que la dérivée de la fonction f est définie par :

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

8. Etudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
9. Donner l'équation réduite de la tangente \mathcal{T}_1 à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1.
10. Tracer, sur un même graphique, \mathcal{C}_f et la tangente \mathcal{T}_1 (unité graphique : 4 cm).

Partie C (Bonus)

On considère la fonction h définie par :

$$h(x) = \begin{cases} \frac{x \ln x}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

11. Montrer que la fonction h est continue en 0.
12. Etudier la dérivabilité de la fonction h en 0.

Fin du sujet
