

**Corrigé**

- 
1. Une quantité varie, sur une durée donnée, d'un taux égal à  $t$  (on dit par exemple que les prix ont varié, sur une année, de 2,5% ou 0,025). On note  $Q_i$  la valeur de la quantité en début de période et  $Q_f$  la valeur de cette même quantité en fin de période.  
Exprimer, en justifiant,  $Q_f$  en fonction de  $Q_i$  et  $t$ .
- 

La variation en valeur de la quantité s'écrit :  $Q_f - Q_i$ .

Par définition du taux  $t$ , on a :  $t = \frac{Q_f - Q_i}{Q_i}$  (on rapporte la variation en valeur de la quantité à la valeur initiale).

D'où :  $t = \frac{Q_f - Q_i}{Q_i} = \frac{Q_f}{Q_i} - \frac{Q_i}{Q_i} = \frac{Q_f}{Q_i} - 1$ . On a donc :  $\frac{Q_f}{Q_i} = 1 + t$  et, finalement :

$$Q_f = (1 + t)Q_i$$

- 
2. Etudier le sens de variation de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = (1 - x)^2 (1 + x)^3$$

---

La fonction  $f$  est une fonction polynomiale. Elle est donc dérivable sur  $\mathbb{R}$ . On peut la dériver comme un produit (ne surtout pas développer ce genre d'expression avant de dériver ! ☺) :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times (-1) \times (1 - x)^{2-1} (1 + x)^3 + (1 - x)^2 \times 3 \times 1 \times (1 + x)^{3-1} \\ &= -2(1 - x)(1 + x)^3 + 3(1 - x)^2 (1 + x)^2 \\ &= (1 - x)(1 + x)^2 [-2(1 + x) + 3(1 - x)] \\ &= (1 - x)(1 + x)^2 (-2 - 2x + 3 - 3x) \\ &= (1 - x)(1 + x)^2 (1 - 5x) \end{aligned}$$

Nous disposons ainsi d'une expression factorisée de la dérivée et pouvant facilement en étudier le signe en tenant compte du fait que l'on a  $(1+x)^2 \geq 0$  pour tout  $x$  réel (avec, en particulier :  $(1+x)^2 = 0 \Leftrightarrow 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$ ).

On a le tableau de signe suivant :

$x$		-1		$\frac{1}{5}$		1	
$1-x$	+		+		+	0	-
$(1+x)^2$	+	0	+		+		+
$1-5x$	+		+	0	-		-
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0	+

On en conclut :

La fonction  $f$  est :

- Strictement croissante sur les intervalles  $]-\infty; \frac{1}{5}]$  et  $[1; +\infty[$ .
- Strictement décroissante sur l'intervalle  $[\frac{1}{5}; 1]$ .

---

### 3. Dresser le tableau de variation de la fonction $f$ .

---

Afin de pouvoir dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ , il nous faut en calculer les limites aux bornes de son ensemble de définition et en donner les valeurs aux points où la dérivée s'annule.

Le terme de plus haut degré de la fonction  $f$  est «  $x^5$  » et on a immédiatement :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$$

On pouvait également procéder de façon plus classique en factorisant :

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^2 (1+x)^3 \\ &= \left[ x \left( \frac{1}{x} - 1 \right) \right]^2 \left[ x \left( \frac{1}{x} + 1 \right) \right]^3 \\ &= x^2 \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^2 x^3 \left( \frac{1}{x} + 1 \right)^3 \\ &= x^5 \left( \frac{1}{x} - 1 \right)^2 \left( \frac{1}{x} + 1 \right)^3 \end{aligned}$$

On a facilement :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right)^3 = 1$  et on peut ainsi retrouver les résultats précédents.

On a ensuite :

$$f(-1) = (1 - (-1))^2 (1 + (-1))^3 = 0, \quad f(1) = (1 - 1)^2 (1 + 1)^3 = 0$$

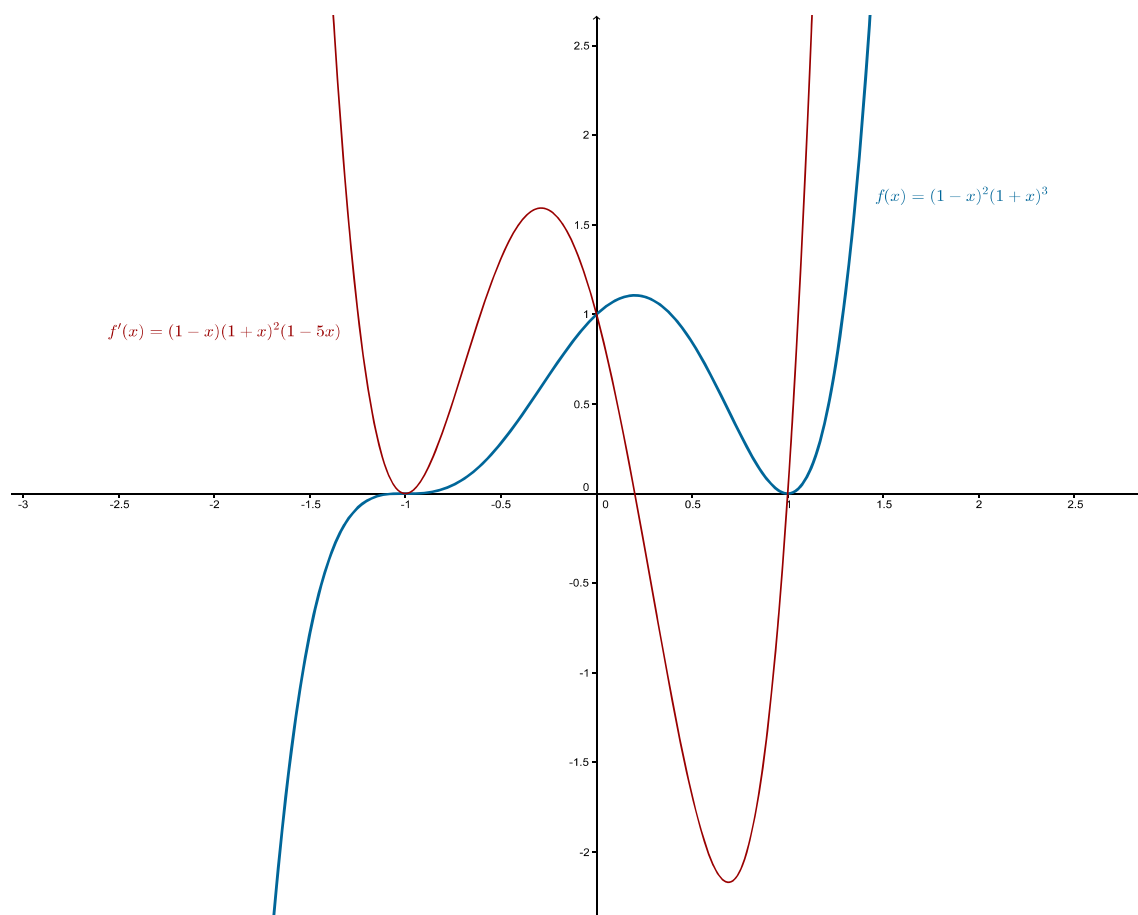
$$f\left(\frac{1}{5}\right) = \left(1 - \frac{1}{5}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{5}\right)^3 = \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{3456}{3125} \approx 1,1$$

On obtient alors :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0,2$	$1$	$+\infty$					
$f'(x)$		+	0	+	0	-	0	+		
$f$	$-\infty$				$f\left(\frac{1}{5}\right)$			$0$		$+\infty$

- 
4. Tracer, à l'aide de Geogebra impérativement, sur un même graphique muni d'un repère orthonormal les représentations graphiques des fonctions  $f$  et  $f'$ .
- 

Voir page suivante.



5. Une grandeur économique diminue, les deux premières années de  $t\%$  puis augmente, les trois années suivantes, du même taux ( $t\%$ ).  
On note  $x$  l'écriture décimale du taux (par exemple, avec un taux  $t$  de 2,5% on a :  $t = 2,5$  et  $x = 0,025$ ).

- a. A l'aide de la question 1, exprimer le coefficient multiplicateur global en fonction de  $x$ .

Dans cette question, on a la relation, le taux  $t$  étant exprimé en pourcent :  $x = \frac{t}{100}$ .

En reprenant les notations de la question 1, on a :

$$Q_f = (1-x)(1-x)(1+x)(1+x)(1+x)Q_i = (1-x)^2(1+x)^3 Q_i = f(x)Q_i$$

Le coefficient multiplicateur global est égal à  $f(x)$ .

- 
- b. Déterminer le taux d'évolution (inférieur à 100%) qui permet d'obtenir un coefficient multiplicateur global maximal. Donner alors le pourcentage d'évolution maximale pour ces cinq années.
- 

Puisque l'on cherche un taux inférieur à 100%, on veut  $x < 1$ .

D'après l'étude des variations de la fonction  $f$ , celle-ci admet, sur l'intervalle  $] -\infty ; 1[$  un

maximum global pour  $x = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\%$ .

On avait par ailleurs calculé :  $f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3456}{3125} \approx 1,1059 = 1 + 0,1059 = 1 + \frac{10,59}{100}$ .

Finalement :

<p>Le coefficient multiplicateur global sera maximal pour un taux d'évolution de 20% et le pourcentage d'évolution maximale sur les cinq années sera alors d'environ 10,59%.</p>
--