CORRIGE DE L'EXERCICE N°2

Remarque générale : même si l'on ne demande « que » de dériver les fonctions proposées, on doit garder présent à l'esprit que dans la plupart des cas, c'est le signe de la fonction dérivée qui va nous intéresser ! Ainsi, on cherchera à obtenir une expression factorisée dont le signe serait, à priori, simple à déterminer.

1. $f(x) = 2e^x \ln x$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

On dérive f comme un produit (au facteur multiplicatif 2 près) de deux fonctions dérivables sur *I*.
On pose :

- $u : x \mapsto e^x$ qui donne $u' : x \mapsto e^x$.
- $v : x \mapsto \ln x$ qui donne $u' : x \mapsto \dfrac{1}{x}$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2\left[u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\right] \\ &= 2\left(e^x \ln x + e^x \frac{1}{x}\right) \\ &= 2e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{f'(x) = 2e^x\left(\ln x + \frac{1}{x}\right) \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*.}$$

2. $g(x) = (3 - 2\ln x)^2$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.

On peut dériver *g* comme le produit de la fonction $x \mapsto 3 - 2\ln x$ par elle-même … Plus directement, on peut utiliser la formule « $(u^2)' = 2uu'$ » avec $u : x \mapsto 3 - 2\ln x$.

Avec $u'(x) = 3 - 2\ln x = 0 - 2 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{-2}{x}$, on obtient immédiatement :

$$g'(x) = 2 \times (3 - 2\ln x) \times \frac{-2}{x} = \frac{-4}{x}(3 - 2\ln x)$$

$$\boxed{g'(x) = \frac{-4}{x}(3 - 2\ln x) \text{ sur } I = \mathbb{R}_+^*.}$$

3. $h(x)=\dfrac{2+\ln x}{3-\ln x}$ sur $I=\left]e^3\,;+\infty\right[$.

On pose :

- $u : x \mapsto 2+\ln x$ qui donne $u' : x \mapsto 0+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x}$.
- $v : x \mapsto 3-\ln x$ qui donne $v' : x \mapsto 0-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{x}$.

En utilisant la formule de dérivation d'un rapport, il vient :

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{x}\times(3-\ln x)-(2+\ln x)\times\left(-\frac{1}{x}\right)}{(3-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}\left[(3-\ln x)+(2+\ln x)\right]}{(3-\ln x)^2}=\frac{\frac{1}{x}\times 5}{(3-\ln x)^2}=\frac{5}{x(3-\ln x)^2}$$

$$\boxed{h'(x)=\frac{5}{x(3-\ln x)^2}\ \text{ sur } I=\left]e^3\,;+\infty\right[\,.}$$

4. $k(x)=\dfrac{e^{-x}-\ln x}{e^{-x}+\ln x}$ sur $I=\left[1\,;+\infty\right[$.

On pose cette fois :

- $u : x \mapsto e^{-x}-\ln x$ qui donne $u' : x \mapsto -e^{-x}-\dfrac{1}{x}$.
- $v : x \mapsto e^{-x}+\ln x$ qui donne $v' : x \mapsto -e^{-x}+\dfrac{1}{x}$.

En utilisant comme précédemment la formule de dérivation d'un rapport, il vient :

$$\begin{aligned}
k'(x)&=\frac{\left(-e^{-x}-\frac{1}{x}\right)\times\left(e^{-x}+\ln x\right)-\left(e^{-x}-\ln x\right)\times\left(-e^{-x}+\frac{1}{x}\right)}{\left(e^{-x}+\ln x\right)^2}\\
&=\frac{\cancel{-e^{-2x}}-e^{-x}\ln x-\frac{e^{-x}}{x}-\cancel{\frac{\ln x}{x}}\cancel{+e^{-2x}}-\frac{e^{-x}}{x}-e^{-x}\ln x+\cancel{\frac{\ln x}{x}}}{\left(e^{-x}+\ln x\right)^2}\\
&=\frac{-2e^{-x}\ln x-2\frac{e^{-x}}{x}}{\left(e^{-x}+\ln x\right)^2}=-2e^{-x}\,\frac{\ln x+\frac{1}{x}}{\left(e^{-x}+\ln x\right)^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{k'(x)=-2e^{-x}\,\frac{\ln x+\frac{1}{x}}{\left(e^{-x}+\ln x\right)^2}\ \text{ sur sur } I=\left[1\,;+\infty\right[\,.}$$