

**Corrigé**

**Exercice N°1**

Calculer les intégrales suivantes

1. En tenant compte du fait que l'on a  $[e; e^2] \subset \mathbb{R}_+^*$  :

$$\begin{aligned}\int_e^{e^2} \left( t + \frac{1}{t} \right) dt &= \left[ \frac{1}{2} t^2 + \ln t \right]_e^{e^2} \\ &= \frac{1}{2} (e^2)^2 + \ln(e^2) - \left( \frac{1}{2} e^2 + \ln e \right) \\ &= \frac{1}{2} e^4 + 2 \ln e - \frac{1}{2} e^2 - 1 \\ &= \frac{1}{2} e^4 - \frac{1}{2} e^2 + 2 - 1 \\ &= \frac{1}{2} (e^4 - e^2 + 2)\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_e^{e^2} \left( t + \frac{1}{t} \right) dt = \frac{1}{2} (e^4 - e^2 + 2)}$$

2. On pose :  $u : x \mapsto 3x^2 + 6x - 5$ . En tant que fonction polynôme,  $u$  est dérivable et pour tout  $x$  réel, on a :  $u'(x) = 6x + 6 = 6(x+1)$ . On a donc :

$$\begin{aligned}\int_{-1}^0 (x+1)(3x^2 + 6x - 5)^4 dx &= \int_{-1}^0 \frac{1}{6} u'(x) (u(x))^4 dx = \frac{1}{6} \int_{-1}^0 u'(x) (u(x))^4 dx \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{4+1} (u(x))^{4+1} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{5} (3x^2 + 6x - 5)^5 \right]_{-1}^0 \\ &= \frac{1}{6} \left[ \frac{1}{5} (3 \times 0^2 + 6 \times 0 - 5)^5 - \frac{1}{5} (3 \times (-1)^2 + 6 \times (-1) - 5)^5 \right] \\ &= \frac{1}{30} [(-5)^5 - (3 - 6 - 5)^5] = \frac{29\,643}{30} \\ &= \frac{9\,881}{10} = 9,881\end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^0 (x+1)(3x^2 + 6x - 5)^4 dx = \frac{9\,881}{10} = 988,1}$$

3. On pose  $u : x \mapsto x^2 + x + 1$ . En tant que fonction polynôme,  $u$  est dérivable et pour tout  $x$  réel, on a :  $u'(x) = 2x + 1$ . Le discriminant associé au trinôme  $x^2 + x + 1$  vaut  $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ . La fonction  $u : x \mapsto x^2 + x + 1$  garde donc un signe constant sur  $\mathbb{R}$ , celui du coefficient de «  $x^2$  ». On en déduit finalement que la fonction  $u$  prend des valeurs strictement positives sur  $\mathbb{R}$  et que la fonction  $x \mapsto \frac{2x+1}{x^2+x+1}$  admet pour primitive sur cet intervalle :  $x \mapsto \ln(x^2 + x + 1)$ . Il vient alors :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx &= \left[ \ln(x^2+x+1) \right]_{-1}^0 \\ &= \ln(0^2+0+1) - \ln((-1)^2+(-1)+1) \\ &= \ln 1 - \ln 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_{-1}^0 \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = 0}$$

### **Exercice N°2**

1. La fonction  $x \mapsto x \ln x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. La fonction  $F : x \mapsto x \ln x - x$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  comme différence de deux fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout  $x$  réel strictement positif, on a alors :

$$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

On en déduit immédiatement :

La fonction  $x \mapsto x \ln x - x$  est une primitive de la fonction logarithme népérien sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

2. En utilisant le résultat de la question précédente, on a alors :

$$\int_1^e \ln x dx = [x \ln x - x]_1^e = e \ln e - e - (1 \times \ln 1 - 1) = e - e + 1 = 1$$

$$\boxed{\int_1^e \ln x dx = 1}$$

3. On a, par définition de la valeur moyenne :

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4-2} \int_2^4 \ln x \, dx = \frac{1}{2} [x \ln x - x]_2^4 \\ &= \frac{1}{2} [4 \ln 4 - 4 - (2 \times \ln 2 - 2)] = \frac{1}{2} (4 \ln 2^2 - 4 - 2 \ln 2 + 2) \\ &= \frac{1}{2} (8 \ln 2 - 2 - 2 \ln 2) = \frac{1}{2} (6 \ln 2 - 2) \\ &= 3 \ln 2 - 1 \end{aligned}$$

La valeur moyenne de la fonction logarithme népérien sur l'intervalle  $[2; 4]$  est égale à  $3 \ln 2 - 1$ .

On a d'abord :  $3 \ln 2 - 1 = \ln 2^3 - \ln e = \ln 8 - \ln e = \ln \frac{8}{e}$ .

On a alors :  $\ln c = m \Leftrightarrow \ln c = 3 \ln 2 - 1 \Leftrightarrow \ln c = \ln \frac{8}{e} \Leftrightarrow c = \frac{8}{e}$ .

A titre de vérification (partielle), notons que l'on a :  $\frac{8}{e} \approx 2,943$ . Le réel  $c$  obtenu appartient bien à l'intervalle  $[2; 4]$ .

Le réel  $c$  de l'intervalle  $[2; 4]$  vérifiant  $\ln c = m = 3 \ln 2 - 1$  est égal à  $\frac{8}{e} \approx 2,943$ .

### Exercice N°3

1. En utilisant la relation de Chasles, il vient :

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{4}{t^2 + 1} dt + \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

$$\text{D'où : } \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt$$

Puis :

$$4 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{4}{t^2 + 1} dt = 4 \left( \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2 + 1} dt \right) = 4 \left( \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} \right) = 4 \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{3}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{4}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{3}$$

2. On a :  $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{4}{t^2+1} dt = 4 \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{t^2+1} dt = 4 \left( F(1) - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = 4 \left( \frac{\pi}{2} - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right)$ .

D'après la question précédente, on a aussi :  $\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{4}{t^2+1} dt = \frac{\pi}{3}$ .

D'où :

$$4 \left( \frac{\pi}{4} - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right) = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}$$

$$\Leftrightarrow F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

$$\boxed{F\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}}$$