

Toutes calculatrices autorisées.

Le sujet comporte un total de 4 exercices par élève.

EXERCICE 1 (5 points) Centres étrangers 2010

Commun à tous les candidats

Pour une marque de téléphone portable donnée, on s'intéresse à deux options de dernière technologie proposées, le GPS et le Wifi. Sur l'ensemble des téléphones portables, 40 % possèdent l'option GPS. Parmi les téléphones avec l'option GPS, 60 % ont l'option Wifi.

On choisit au hasard un téléphone portable de cette marque et on suppose que tous les téléphones ont la même probabilité d'être choisis.

On considère les événements suivants :

G : « le téléphone possède l'option GPS ».

W : « le téléphone possède l'option Wifi ».

Dans tout l'exercice, le candidat donnera des valeurs exactes.

1. Traduire les données chiffrées de l'énoncé en termes de probabilité.
2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré, qui sera complété tout au long de l'exercice.

On suppose que la probabilité de W est : $p(W) = 7/10$
3. Déterminer la probabilité de l'évènement « le téléphone possède les deux options ».
4. Démontrer que $p_{\bar{G}}(W) = 23/30$
Compléter l'arbre du 2.
5. On choisit un téléphone avec l'option Wifi. Quelle est la probabilité qu'il ne possède pas l'option GPS ?

Le coût de revient total par téléphone d'une option, pour le fabricant de téléphones, est de 12 euros pour l'option GPS et de 6 euros pour l'option Wifi.

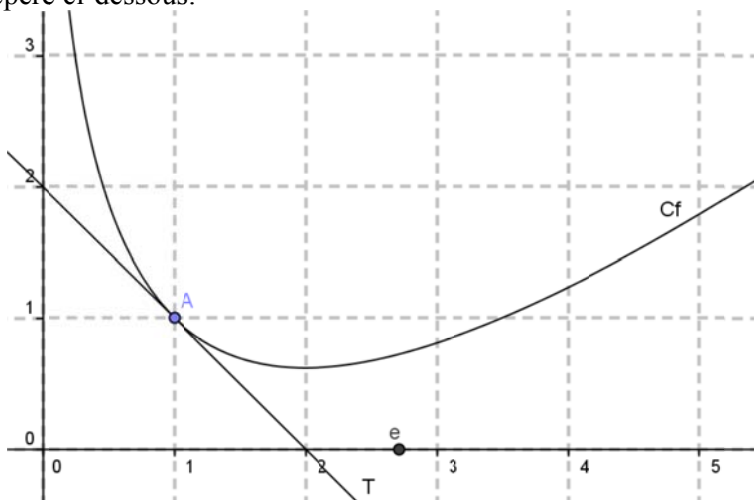
6. Déterminer la loi de probabilité du coût de revient de ces deux options.
7. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Interpréter ce résultat.

EXERCICE 2 (5 points) Antilles-Guyane 2009

Commun à tous les candidats

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ dont on donne la représentation graphique (Cf) dans le repère ci-dessous.



On admet que

- le point A de coordonnées (1 ; 1) appartient à la courbe (Cf) ;
- la tangente (T) en A à la courbe (C) passe par le point de coordonnées (2 ; 0) ;
- la courbe (Cf) admet une tangente horizontale au point d'abscisse 2 ;
- l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe de la fonction f .

Partie A

1. Donner, par lecture graphique ou en utilisant les données de l'énoncé, les valeurs de $f(1)$, $f'(1)$ et $f'(2)$, où f' est la fonction dérivée de f sur $]0 ; +\infty[$.
 2. On admet que l'expression de $f(x)$ sur $]0 ; +\infty[$ est : $f(x) = ax + b + c \ln x$ où a , b et c sont des nombres réels.
- a. Calculer $f'(x)$ en fonction de x et de a , b et c .

b. Démontrer que les réels a , b et c vérifient le système

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + c = -1 \\ a + \frac{c}{2} = 0 \end{cases}$$

- c. Dédurre de la question précédente les valeurs de a , b et c , puis l'expression de $f(x)$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie pour tout réel x appartenant à $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x - 2 \ln x$.

1. a. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe représentative de f .
b. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. a. Démontrer que la fonction H définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $H(x) = x \ln x - x$ est une primitive de la fonction h définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = \ln x$.
b. En déduire une primitive F de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.

EXERCICE 3 (5 points)

Commun tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$ par

$$f(x) = 20(x-1) e^{-0,5x} .$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$

1. **a.** Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5 ; 8]$

$$f'(x) = 10(-x+3) e^{-0,5x}$$

b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f

2. Construire la courbe représentative (C) de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J)

On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm, sur l'axe des ordonnées.

3. Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$ par $F(x) = \frac{-40(x+1)}{e^{0,5x}}$

est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5 ; 8]$.

Partie B : Application économique

Une entreprise produit sur commande des bicyclettes pour des municipalités.

La production mensuelle peut varier de 50 à 800 bicyclettes.

Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A de la façon suivante :

si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

1. **a.** Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois-là un bénéfice de 7 989 euros.

b. Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 408 bicyclettes un mois donné.

2. *Pour cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte*
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la **partie A** et le modèle précédent.

Justifier chaque réponse.

a. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?

b. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum. Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.

c. Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8 000 euros ?

Exercice 4

Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

Pour chacune des questions suivantes, indépendantes les unes des autres, il vous est proposé plusieurs affirmations. Répondre par OUI ou NON à chaque affirmation en cochant la case qui convient.

Notation : une bonne réponse rapporte un demi-point, une mauvaise réponse en retire un quart; la note finale ne peut être inférieure à 0.

Question 1

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	-	0	+	
$f(x)$	2	\searrow	\nearrow	$+\infty$	\searrow	\nearrow	$+\infty$
		-3		$+\infty$	0		

On a donné ci-dessus le tableau de variation d'une fonction f définie et dérivable sur $]-\infty; 1[\cup]1; +\infty[$. On appelle C_f sa représentation graphique dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On peut affirmer que :

	OUI	NON
La droite d'équation $x = 2$ est asymptote à C_f		
La droite d'équation $x = 1$ est asymptote à C_f		
La tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = 3x$		
L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans \mathbb{R}		
L'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique dans $]0; 1[$		
La droite d'équation $y = 2$ coupe C_f exactement en deux points.		

Question 2

Soit g une fonction dérivable et strictement croissante sur $]1; +\infty[$.

On peut affirmer :

	OUI	NON
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$		
Pour tout réel x de $]1; +\infty[$, $g(x) > g(1)$		

Partie B

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, trois affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse fausse enlève 0,25 point et l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie.

1. La fonction f est définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels \mathbb{R} .

$$f(x) = e^{-2x+1}$$

On note f' sa fonction dérivée.

- a) Pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = e^{-2}$
- b) Pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = e^{-2x+1}$
- c) Pour tout x de \mathbb{R} , $f'(x) = -2e^{-2x+1}$
2. L'égalité $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$ est vraie pour tout x de :

- a) $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$
- b) $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
- c) $]1; +\infty[$

Exercice 4

Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité

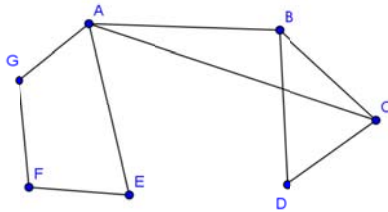
Partie A

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM). Pour chacune des questions, quatre affirmations sont proposées, une seule réponse est exacte.

Une réponse exacte rapporte 0,5 point, une réponse fausse enlève 0,25 point et l'absence de réponse ne rapporte et n'enlève aucun point.

Pour chaque question, le candidat notera sur sa copie le numéro de la question suivi de la proposition qui lui semble correcte. Aucune justification n'est demandée.

1. Le graphe G ci-dessous



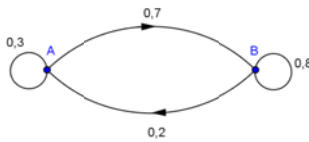
A) a un nombre chromatique μ égal à :

- 2
- 3
- 4
- 5

B) • G n'est pas un graphe connexe.

- G admet une chaîne eulérienne.
- L'ordre du graphe G est 9.
- Il existe un sommet de degré 1.

2. Soient G le graphe probabiliste ci-dessous et M la matrice de transition associée à ce graphe, les sommets étant rangés dans l'ordre alphabétique.



A) • $M^2 = \begin{pmatrix} 0,23 & 0,77 \\ 0,22 & 0,78 \end{pmatrix}$

• $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,3 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$

• $M^2 = \begin{pmatrix} 0,73 & 0,27 \\ 0,72 & 0,28 \end{pmatrix}$

• $M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,8 \\ 0,7 & 0,2 \end{pmatrix}$

B) Soit P la matrice stable du graphe G.

• $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

• $P = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,7 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix}$

• $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$

• $P = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,78 & 0,22 \end{pmatrix}$

3. La suite (u_n) est définie par :

Pour tout entier naturel n , $u_n = e^{-n \ln 2}$.

- La suite (u_n) est arithmétique de raison $e^{-\ln 2}$.
- La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
- La suite (u_n) n'est pas une suite géométrique.
- La suite (u_n) est géométrique de raison $-\ln 2$.

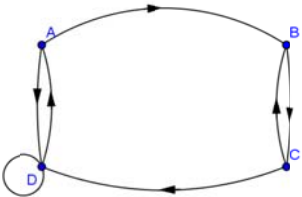
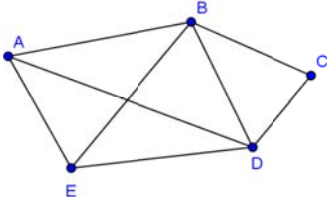
4. Une forêt, exploitée depuis le premier janvier 2005, voit sa population d'arbres diminuer de 10 % chaque année. En supposant que la déforestation se poursuive à ce rythme, la population d'arbres aura diminué le premier janvier 2010 d'environ :

- 41 %
- 50 %
- 59 %
- 49 %

Partie B

Pour chacune des questions suivantes, indépendantes les unes des autres, il vous est proposé plusieurs affirmations. Répondre par VRAI ou FAUX à chaque affirmation en cochant la case qui convient.

Notation : une bonne réponse rapporte un demi-point, une mauvaise réponse en retire un quart; la note finale ne peut être inférieure à 0.

	VRAI	FAUX
<p>1. Soit (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par :</p> $u_n = \frac{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1+n}$ <p>Cette suite a pour limite $\frac{1}{n}$</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<p>2. Le graphe ci-contre admet exactement 1 chaîne de longueur 4 allant de A vers B avec</p> 	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<p>3. La suite (v_n) définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{4n+3}{n+1}$ est majorée par 0</p>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
<p>4. Le diamètre du graphe H ci-dessous est 5.</p> 	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>